

Luis Lara Romero
Zenner Chávez Aliaga
José Castañeda Vergara

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

TEORÍA Y PRÁCTICA

FONDO EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD PRIVADA ANTONOR ORREGO

Luis Lara Romero
Zenner Chávez Aliaga
José Castañeda Vergara

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS

Teoría y práctica

FONDO EDITORIAL DE LA UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS. TEORÍA Y PRÁCTICA

© Luis Lara Romero

© Zenner Chávez Aliaga

© José Castañeda Vergara

Editado por:

© UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO

Av. América Sur N° 3145,

Urb Monserrate, Trujillo, Perú

Teléfono (51) 44 604444, anexo 2087

www.upao.edu.pe

Primera edición del Fondo Editorial UPAO, octubre 2019

Tiraje: 500 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2019-17206
ISBN N°

Se terminó de imprimir en diciembre de 2019 en:

IMPRENTA EDITORIAL GRÁFICA REAL S.A.C.

Jr. Independencia 953, Trujillo - Perú

T. (51-44) 253324

ventas@graficareal.pe

Impreso en Perú.

DEDICATORIA

Dedico este libro a:

Dios por concederme la sabiduría y
salud que tengo.

A mi familia

Autores:

Luis Lara
Zenner Chávez
José Castañeda

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a todas aquellas personas que han hecho posible la realización de este libro.

Este libro no hubiera sido posible sin el interés y ánimo que nos han dado una serie de personas y amigos, a todos ellos mi agradecimiento.

Autores:

Luis Lara
Zenner Chávez
José Castañeda

ÍNDICE GENERAL

1 | CAPÍTULO 1 Introducción a los métodos numéricos

1.	Métodos de discretización	7
2.	El método de diferencias finitas (MDF)	8
3.	Problema de valor inicial con condiciones de contorno	20
4.	Convergencia	22
4.1.	Convergencia de un problema de valor inicial	26
4.2.	Convergencia de un problema de valor inicial-contorno	30
5.	Consistencia	32
5.1.	Consistencia de problemas de valor inicial	33
5.2.	Consistencia de problemas de valor inicial-contorno	36
6.	Estabilidad	41
6.1.	Análisis de estabilidad matricial	42
6.2.	Estabilidad de problemas de valor inicial	46
6.3.	Estabilidad de problemas de valor inicial-contorno	48
7.	El teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer	49
8.	Análisis de estabilidad de los esquemas de diferencias finitas	56
8.1.	Análisis de estabilidad para problemas de valor inicial	57
8.2.	La transformada de Fourier	58
8.3.	Análisis de Fourier	60
9.	Estabilidad para problemas de valor inicial-frontera	62
9.1.	Series de Fourier y estabilidad	63

9.2.	Análisis de error en el método de diferencias finitas	75
9.3.	Viscosidad artificial	80

83

CAPÍTULO 2

Método de diferencias para ecuaciones hiperbólicas

1.	Método de las características	84
2.	Sistemas de ecuaciones hiperbólicas	92
3.	Derivación de leyes de conservación	94
4.	Leyes de conservación escalar	97
4.1.	Condiciones de contorno en la ecuación de convection	99
5.	Esquemas de diferencias finitas	100
5.1.	La condición de Courant-Friedrichs-Lewy CFL	104
6.	Estabilidad para esquemas de diferencias explícitos	104
6.1.	Esquema forward-time central-space FTCS	104
6.2.	Esquema Upwind	106
6.3.	Esquemas Leapfrog	108
6.4.	Esquema Lax-Wendroff	112
6.5.	Esquema Lax-Friedrichs	114
7.	Esquemas implícitos	115
7.1.	Esquema BTCS	115
7.2.	Esquema Crank-Nicolson	116
8.	Resultados numéricos	117

135

CAPÍTULO 3

Método de Diferencias para ecuaciones parabólicas

1.	Ecuación del difusión	139
2.	Principio del máximo y el decaimiento exponencial	152
2.1.	Principio del máximo	153
2.2.	Decaimiento de soluciones	154
2.3.	Efecto regularizante	155
3.	Esquemas explícitos	156
3.1.	Esquema FTCS	156
3.2.	Esquema Leapfrog	158
3.3.	Esquema Du Fort-Frankel	160
4.	Esquemas implícitos	165
4.1.	Esquema BTCS o Euler retrasado	165
4.2.	Esquema Crank-Nicolson	169

4.3.	Esquemas semi-implícitos	173
5.	Estabilidad de esquemas de diferencias finitas	174
6.	Implementación numérica	176
7.	Aplicaciones	182

187 | CAPÍTULO 4 La Ecuación del Transporte

1.	Ley de conservación de masa	187
2.	Esquemas explícitos	189
2.1.	Esquema FTCS	189
2.2.	Esquema Upwind	186
2.3.	Esquema Du Fort-Frankel	200
2.4.	Esquema Lax-Wendroff	203
3.	Esquemas implícitos	204
3.1.	Esquema de Crank-Nicolson	205
4.	Resultados numéricos	206

211 | BIBLIOGRAFÍA

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

En los últimos años, se ha notado un creciente interés de matemáticos y especialistas en computación científica, por tratar problemas que involucran modelos con parámetros de un tamaño arbitrario [4]. Muchos de estos modelos interpretan problemas que ocurren en la realidad como en flujos de fluidos, flujo en medios porosos, transferencia de calor y masa, electromagnetismo, contaminación del medio ambiente. Las ecuaciones diferenciales parciales (**EDP**), [4][5][10], que provienen de este tipo de problemas se caracterizan por tener mas variables dependientes y mas de una variables independientes, cuando una de las variables independientes es la variable temporal las ecuaciones generalmente tienen una parte convectiva y una parte difusiva, así como también interpretan los estados transitorios y estados estacionario. Esto a su vez dá origen a trabajar con ecuaciones de tipo hiperbólico, ecuaciones de tipo parabólico o una combinación de ambas ecuaciones. La convección y difusión ocurren simultáneamente en muchas situaciones de la física.

Por la variedad de tipo de ecuación, no todo método numérico de resolución de ecuaciones diferenciales es aplicable en todos los casos. Es necesario realizar un estudio sobre el método numérico más conveniente antes de su aplicación a un problema concreto. Esto garantizará que la solución numérica obtenida se aproxime convenientemente a la solución exacta del problema planteado.

La solución numérica es la solución de un problema discreto, el cual es producto del proceso de discretización del problema planteado analíticamente. La solución numérica o discreta se considera convenientemente buena usando los siguientes conceptos:

1. **Consistencia:** la ecuación discreta es tan cercana a la ecuación diferencial tanto como queramos salvo un error de truncamiento.
2. **Convergencia:** la solución del problema discreto tiende a la solución del problema continuo. El error de aproximación se llama error global de precisión.
3. **Estabilidad:** pequeñas variaciones en los datos iniciales no provocan grandes variaciones en los resultados correspondientes.

Cuando aplicamos un método numérico en particular se presentan dos tipos de errores en la solución. Estos errores pueden ser causados por el error de redondeo, el cual es una propiedad particular del tipo de computadora usada o por la aplicación de un esquema de diferencias finitas, es decir, un error de discretización. Si el error introducido cuando aplicamos un esquemas de diferencias finitas no es controlado, el crecimiento del error con la solución de la ecuación discreta, dará como resultado una solución no estable, es decir, a partir de un cierto cálculo, las soluciones discretas se tornan incontrolables. Entender y controlar los errores por un análisis de estabilidad es esencial para una solución exitosa dada por el método de diferencias finitas.

Podemos mencionar dos métodos de análisis de estabilidad, el *método de perturbación discreta* y el *análisis de von Neumann*. El método de von Neumann es muy usado y es menos pesado matemáticamente. El método de perturbación discreta consiste en introducir en un punto una perturbación, y su efecto se investiga sobre una vecindad de dicho punto. Si la perturbación crece con la solución el esquema es inestable.

En este texto trabajaremos con el método de diferencia finitas (**MDF**),[4],[16],[17] en la ecuación del transporte, vista como una combinación de convección-difusión.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.1)$$

donde t representa el tiempo, x la variable espacial, a y α son la velocidad convectiva y el coeficiente de difusividad respectivamente, y u es alguna cantidad escalar (temperatura por ejemplo). Decidimos trabajar con este modelo puesto que a través de el, se puede interpretar una amplia y variada gama de problemas, y puede ser visto como combinación de la ecuación de convección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (1.2)$$

donde a es una constante que representa la velocidad del fluido; y la ecuación de difusión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.3)$$

donde α es también considerada como constante y representa la difusividad del medio.

La ecuación del transporte por convección-difusión reúne dos procesos diferentes: el difusivo, descrito matemáticamente por la ecuación parabólica (1.3); y el convectivo descrito por la ecuación hiperbólica (1.2). Teniendo en cuenta estos dos procesos, la expresión que los rige de forma conjunta será la ecuación diferencial (1.1) llamada ecuación del transporte, la cual se puede ubicar en el área de la dinámica de fluidos computacional (**DFC**).

Por la facilidad en su aplicabilidad el método de diferencias finitas ha sido usado en muchos problemas de la (**DFC**), obteniendo gran éxito en algunos casos, pero también numerosas dificultades en otros casos como se puede ver en Fletcher [6]. Se requiere de un análisis de estabilidad a fin de determinar si un esquema de diferencias finitas (**EDF**), simple o complicado resulta útil; pero este proceso a su vez llega a ser lento y voluminoso que intentarlo por la experimentación numérica llega a ser mas realista y fácil de implementar.

Como sabemos las ecuaciones diferenciales parciales están presentes en casi todas las ramas de la ciencia, así que cada tipo de ecuación diferencial se adecuará en mayor o menor grado a un esquema de diferencias finitas diferente que es una estrategia especial o particular de aproximación numérica. Pero para que un esquema de diferencias sea aceptable tenemos que garantizar que la solución aproximada sea bastante cercana a la solución exacta, esto es convergencia. Pero para llegar a establecer la convergencia de las soluciones aproximadas a la solución exacta necesitamos dos conceptos importantes, consistencia y estabilidad, [6],[11],[16],[17] que es la forma de llegar a establecer la convergencia de la solución aproximada de manera indirecta utilizando el teorema de equivalencia de Lax-Richmyer [16], [18].

Para el estudio de la estabilidad numérica se fija el paso espacial y temporal y se examina el comportamiento de la solución cuando t tiende al infinito. Uno espera que en este caso los errores acumulados no se amplifiquen de modo que los resultados numéricos sean validados. Entonces si la amplificación del error es restringida, en un cierto sentido, se dice que el método de diferencias finitas es numéricamente estable. Consistencia tiene que ver con el orden de truncamiento local para el operador diferencial discreto. La técnica más utilizada para estudiar la estabilidad numérica de esquemas de diferencias son el método de Fourier o de von Neumann, el método matricial y el método de perturbación discreta. La estabilidad es uno de los conceptos mas importantes que se debe tener presente cuando se trabaja con soluciones aproximadas, porque podemos tener esquemas que son consistentes con la ecuación diferencial; pero no estables y por lo tanto no serán convergentes. Veamos un caso que se presenta: si empleamos la ecuación del transporte

(1.1) que es una combinación de la ecuación parabólica de difusión y la ecuación hiperbólica de convección. Cada una de estas ecuaciones tiene sus propios esquemas de diferencias finitas como por ejemplo ATCE, Upwind, Leapfrog, Lax-Wendroff, Du Fort-Frankel, Crank-Nicolson, entre otros y por lo tanto su propias condiciones para la estabilidad y sus propios órdenes de truncamiento. Pero surge un problema en la estabilidad al momento de hacer la combinación convección-difusión. Por ejemplo, el esquema ATCE aplicado a la ecuación de difusión es condicionalmente estable con $r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 0.5$.

Sin embargo, el mismo esquema para la ecuación de convección es inestable para todo número de Courant $C_r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$. La combinación de los dos necesita condiciones dependientes entre el número de difusión r y el número de Courant C_r a través del número de Peclet desarrollado para el caso de la convección. Otro ejemplo que podemos citar es el esquema Upwind, que es condicionalmente estable con $C_r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}$ y en combinación con el esquema ATCE para la ecuación de difusión, da como resultado un esquema Upwind para la ecuación del transporte condicionalmente estable, pero dependiendo de los dos parámetros. Es natural preguntarse por las condiciones y relaciones que deben cumplir los parámetros r y C_r para tener esquemas estables para la ecuación del transporte. Además estableceremos criterios sobre los parámetros C_r y r para obtener condiciones de estabilidad para complicados esquemas de diferencias.

En general, existen las ecuaciones diferenciales que gobiernan los cambios de concentración de una sustancia en un cuerpo de agua, que carecen de solución analítica, y por lo tanto su solución debe obtenerse por medio de aproximaciones numéricas. El método de diferencias finitas se ha utilizado tradicionalmente para resolver ecuaciones de este tipo, la amplia difusión de su uso se debe principalmente a su claridad conceptual y a su facilidad de programación en un computador, ya que en este método las ecuaciones diferenciales se transforman directamente en ecuaciones en diferencias finitas. En términos, generales los pasos a seguir para obtener la solución numérica a un problema son : (1) Seleccionar un método adecuado para el tipo de ecuación involucrada; (2) Discretizar el problema obteniendo un sistema ecuaciones finito dimensional; (3) Resolver el sistema de ecuaciones algebraicas que se han obtenido.

En el proceso de discretización de las ecuaciones diferenciales por medio de diferencias finitas, las variables dependientes que describen el estado del sistema se consideran definidas en un número finito de puntos o nodos dentro del dominio a considerar, cuyas dimensiones están dadas por el número de variables independientes. Los nodos forman una red computacional y están identificados mediante un conjunto de índices, por ejemplo en una dimensión se puede denotar por (j, n) , relacionados con la coordenada espacial x y temporal t de los nodos, por medio de los intervalos de discretización en cada dimensión,

por ejemplo $(\Delta x, \Delta t)$. El conjunto de nodos son necesarios para escribir la ecuación de diferencias y los coeficientes en las ecuaciones diferenciales del modelo, relacionados a un nodo, forman la llamada molécula computacional de un esquema de diferencias finitas.

Los términos *implícitos* y *explícito* están relacionados a la dinámica del esquema de diferencias finitas y depende de la forma en que se calcule el avance en el tiempo. Los esquemas explícitos producen soluciones explícitas para las variables dependientes en cada nivel de tiempo, explícitamente en función de valores conocidos en el nivel de tiempo anterior. Por otra parte, en los esquemas implícitos el cálculo de la solución en un nodo dentro de un nivel, involucra conocer los valores en otros nodos en el mismo nivel, dando como resultado un sistema de ecuaciones para cada nivel de tiempo.

Al aplicar un esquema de diferencias particular, se obtiene un sistema de ecuaciones que pueden ser lineales o no lineales dependiendo de la naturaleza de la ecuación diferencial. En este caso la solución puede obtenerse utilizando un método iterativo, en el cual el sistema de ecuaciones se transforma en un sistema lineal para cada iteración. El sistema suele tener una matriz de coeficientes con una estructura dispersa y puede resolverse haciendo uso de algoritmos especiales.

Para ubicar el método de diferencias finitas dentro de los métodos numéricos presentamos una descripción general epistemológica y lógica de cómo abordar un problema con un método numérico.

La solución numérica de una ecuación diferencial consiste de un conjunto de números a partir de los cuales la distribución de la variable dependiente puede ser construida. En este sentido, un método numérico es semejante a un experimento de laboratorio, en el cual el conjunto de instrumentos leídos nos permiten establecer la distribución de la cantidad medible en el dominio de investigación. Tanto el analista numérico como el experimentador de laboratorio deben quedarse con únicamente un número finito de valores numéricos como resultado. Un método numérico, como el método de diferencias finitas, realiza un proceso de discretización a un problema continuo a fin lograr obtener una solución aproximada.

Finalmente, podemos decir que un método numérico trata como sus incógnitas básicas los valores de las variables dependientes en un número finito de localizaciones llamados puntos o nodos, los cuales se distribuyen formando una malla en el dominio de cálculo. El método incluye la tarea de proveer un conjunto de ecuaciones algebraicas para estas incógnitas y prescribir un algoritmo para resolverlas.

Teniendo en cuenta que un problema de ecuaciones diferenciales parciales es una abstracción de la realidad siempre depende de una cantidad muy grande de parámetros internos del medio. Entonces para ser formulado, se necesita de un espacio infinito di-

mensional. Este problema debe ser aproximado por un problema discreto escrito en un espacio finito dimensional, con un número finito de grados de libertad.

Para ello se usa el proceso de discretización, que consiste en trasladar un problema infinito dimensional a otro finito dimensional, el cual se ha sistematizado en los siguientes pasos: discretización del dominio, discretización de la variable independiente y discretización de la ecuación diferencial que consiste en usar un esquema apropiado que aproxime la ecuación diferencial. Cada vez que se hable de discretización de un problema se hará énfasis a tres pasos.

Jhon von Neumann y H.H. Goldstein han identificado cuatro principales fuentes de errores que son casi inevitables cuando estamos describiendo sistemas físicos.

1. **Errores de modelación:** Los modelos matemáticos de por sí son generalmente diseñados con varias simplificaciones.
2. **Errores de medición:** La mayoría de las descripciones de fenómenos naturales requieren de datos medidos en laboratorio. Estos datos de por sí tienen un error porque dependen de los equipos y otros factores que siempre aparecen en la obtención de ellos.
3. **Errores de truncamiento:** Casi todas las descripciones de problemas de campo involucran un dominio continuo infinito. En el contexto del análisis numérico, solo se puede tratar con un número finito de términos de procesos limitantes, los cuales son normalmente descritos por series infinitas.
4. **Errores de redondeo:** Son errores introducidos por eliminación de dígitos. Cuando los cálculos son realizados, estos pueden ser hechos únicamente en un computador de precisión finita. Los errores aparecen por el tamaño limitado de los registros en la unidad de aritmética del computador.

De los cuatro errores presentados, los errores de truncamiento y redondeo caen en el campo del analista numérico, son acumulados y tienen que controlarse para no dejarlos crecer. Aquí se observa un hecho muy importante, es decir, cuando los cálculos usan una malla más fina, el error de truncamiento decrece pero el error de redondeo crece debido a que los datos numéricos son mas pequeños y por el número creciente de cálculos efectuados. Por tanto, hay que saber controlar ambos errores a fin que el error total permanezca en rangos aceptables.

1.1. Métodos de discretización

Para una ecuación diferencial dada, los métodos de discretización requeridos pueden ser derivados en muchas formas, a continuación mencionamos algunos de los métodos mas comunes:

1. **Serie de Taylor** El procedimiento usual para derivar los esquemas de diferencias finitas consiste en aproximar las derivadas en la ecuación diferencial por diferencias finitas via la serie de Taylor truncada.
2. **Método variacional** Es un método de discretización basado en el cálculo de variaciones, donde se verifica que resolver una ecuación diferencial es equivalente a minimizar una funcional. La funcional es minimizada con respecto a los valores en los puntos de la malla de la variable dependiente, las condiciones resultantes generan las ecuaciones algebraicas requeridas. La formulación variacional es comúnmente empleada en métodos de elementos finitos. La principal dificultad de esta formulación es su aplicabilidad, ya que no todas las ecuaciones diferenciales de interés son interpretadas como minimizadoras de una funcional.
3. **Pesos residuales** Es un método muy potente para resolver ecuaciones diferenciales. El concepto básico es el siguiente: suponer que la solución aproximada de la ecuación diferencial (la variable dependiente) contiene n parámetros por determinar, si sustituimos esta solución en la ecuación diferencial obtendremos un residual. La idea es hacer este residual pequeño en algún sentido, generalmente esta última tarea se hace distribuyendo puntualmente el residual y multiplicando por una función peso e integrando sobre todo el dominio de modo que se aproxime a cero. Por tanto, si se elige una sucesión de funciones peso podremos generar todas las ecuaciones que se requieren para encontrar los parámetros.
4. **Volumen de control** Aquí el dominio de cálculo es dividido en un número de volúmenes de control no traslapados, de manera que existe un volumen de control encerrando un punto de la malla, la ecuación diferencial es integrada sobre el volumen de control. Perfiles por secciones expresan la variación de la variable dependiente entre los puntos de la malla que son usados por las integrales requeridas, el resultado es la ecuación discretizada conteniendo los valores de la variable para un grupo de puntos de la malla. La ecuación discretizada obtenida de esta manera expresa el principio de conservación para el volumen de control finito, tan igual como la ecuación diferencial lo hace para un volumen infinitesimal.

5. Integrales de contorno y teoría de potencial Es el método más moderno, como es natural, está basado en una teoría mucho mas compleja, como es la teoría del potencial, que consiste en formular las soluciones de ecuaciones diferenciales como operadores de integrales de contorno, muchas veces singulares, de modo que la discretización ya no es en todo el dominio, sino únicamente en el contorno y la ecuación se discretiza siguiendo la técnica de Galerkin y de los elementos finitos, pero con una función de prueba muy especial, como es el caso de las funciones de Green de los operadores diferenciales, que formalmente no son otra cosa más que los operadores inversos de los operadores diferenciales y son expresados como integrales sobre el contorno del dominio.

En ésta primera parte de los métodos numéricos para las ecuaciones diferenciales parciales está dedicado al estudio de los esquemas de diferencias finitas. Nuestra intención es hacer nuestro ingreso al campo de la dinámica de fluidos computacional (**DFC**) de una manera accesible, desde luego que no dejamos de mencionar otros métodos que son importantes y que serán tratados en su debido tiempo, tales como los elementos finitos, métodos espectrales elementos de contorno y volúmenes finitos. Utilizamos las ecuaciones diferenciales parciales (**EDP**), ya que esta clase de ecuaciones son las que generalmente modelan los fenómenos naturales, mecánicos y otros tipos de procesos que ocurren en las ciencias e ingeniería.

Suponemos que el lector tiene un conocimiento básico de las ecuaciones diferenciales parciales, así como algunos conocimientos del análisis si se desea probar algunos de nuestros teoremas presentados. A fin de ser más eficientes en nuestro aprendizaje, es necesario citar algunos libros de consulta como Farlow[?], Weinberger [19] y Tijonov [?]. Después de esta rápida presentación comenzamos a presentar los conceptos básicos de los esquemas de diferencias finitas (**EDF**). También presentamos los conceptos importantes de convergencia, consistencia y estabilidad, los cuales están relacionados por el teorema de equivalencia de Lax-Richmyer.

1.2. El método de diferencias finitas (MDF)

El método de diferencias finitas (**MDF**) es un método de carácter general que permite la resolución aproximada de ecuaciones diferenciales definidas en dominios finitos. Probablemente es el primer método numérico utilizado en la resolución de problemas en dinámica de fluidos y transferencia de calor, así como en problemas electromagnéticos; existe documentación en la que se menciona que Gauss utilizó este método. Su uso se generalizó con la aparición de los primeros ordenadores y la bibliografía sobre el mismo

es abundante en los años 60, especialmente en relación con el análisis de guías de ondas. Este método obtiene una solución aproximada de las ecuaciones diferenciales definidas en un dominio o región de trabajo. En dicho dominio estarán definidas las condiciones de contorno o frontera y las condiciones iniciales que marcarán el punto de partida en la solución de problemas concretos.

El primer paso para la aplicación del método es definir el dominio donde ha de calcularse el valor de la función incógnita a resolverse. Dicho dominio, que en este caso particular será unidimensional, se discretiza en un número variable de puntos formando una malla. Estos puntos son llamados *nodos*. La aplicación del método de diferencias finitas sobre el dominio dará como resultado conocer el valor de la función incógnita en cada uno de esos nodos. El número y disposición de los nodos depende de la exactitud que se desea en las soluciones.

El método aproxima a la función incógnita en cada nodo por su desarrollo en serie de Taylor. El número de términos del desarrollo, que se tendrán en cuenta, será el suficiente para que junto con las condiciones de contorno y las condiciones iniciales sea posible eliminar las derivadas y obtener, de este modo, una ecuación que nos permita conocer el valor de la función en cada nodo. Dicha ecuación, como se verá más adelante, relaciona el valor de la función en un nodo con el valor de la función en los nodos adyacentes.

El proceso anterior se repite para cada uno de los nodos, obteniéndose un sistema de ecuaciones cuya solución conduce a la obtención de la solución aproximada que se está buscando. La solución del sistema de ecuaciones es un proceso iterativo que puede resolverse utilizando diferentes métodos. La aplicación de un método u otro y el número de iteraciones que consideraremos influirán en el resultado final.

Pasos en el método de diferencias finitas

En esta sección presentamos en forma general y básica el concepto de método de diferencias finitas (**MDF**), que por simplicidad lo presentamos en dimensión uno ¹. Para esto, supongamos que tenemos un dominio $\Omega = [0, L]$ en \mathbb{R} donde se plantea el problema y tiene solución.

2.1 Definición.-

Un esquema de diferencias finitas es una combinación de operadores discretos que permiten aproximar una ecuación diferencial por una ecuación en diferencias finitas. \square

2.2 Definición.-

¹Para dimensiones superior puede consultar [6].

Un esquema de diferencias explícito es aquel que se puede escribir en la forma

$$v_j^{n+1} = \text{una suma finita de } v_{j'}^{n'}, n' \leq n$$

□

A fin de entender el método de diferencias finitas explicaremos el proceso de discretización, el cual está referido a discretizar una variable y la discretización de operadores diferenciales.

Discretización de la variable independiente

Discretizar la variable independiente significa discretizar la variable espacial sobre un dominio finito.

Consideremos un intervalo de la forma $\Omega = [0, L]$ ó $[a, b]$ o más general podemos considerar todo \mathbb{R} como un dominio natural. Se elige un número positivo Δx llamado diferencia, luego el dominio es dividido en subintervalos igualmente espaciados de longitud Δx .

También se puede hacer una división en subintervalos no igualmente espaciados, es decir, cada intervalo $[x_i, x_{i+1}]$ tiene longitud Δx_i . Para efectos de una mayor simplicidad consideraremos intervalos homogéneos.

2.1 Definición (Malla).-

Sea Δx un número positivo, una malla en el dominio $\Omega \subset \mathbb{R}$ es un conjunto de puntos $\tau = \{x_n\} \subset \Omega$, tal que cada x_n esta en el interior o en la frontera de un subdominio tal que $x_{n+1} = x_n + \Delta x$. □

Los puntos x_n en la malla se llaman *nodos* y este proceso de elección no es único.

2.2 Definición.-

La *norma* de la malla como el diámetro del subdominio más grande, es decir,

$$\Delta x = ||\tau|| = \max_{0 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$$

□

Discretización de la variable dependiente

Para discretizar la variable dependiente necesitamos entender primero lo que es una función discreta.

2.3 Definición.-

Una función discreta v es aquella que está definida en una malla τ , tal que a cada punto x_n se le asocia un número v_n . \square

Un ejemplo fácil se obtiene considerando una función continua u definida en Ω , a la cual se le puede asociar una función discreta v definida sobre una malla τ de Ω tal que $v_j = u(x_j)$.

A las funciones discretas también se las puede asociar una norma y por tanto ubicarlas en un espacio adecuado.

Como $\Omega \subset \mathbb{R}$ puede ser un intervalo finito, infinito o \mathbb{R} . La función discreta puede contener un número finito o infinito de valores de la forma $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_N)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots)$, $\mathbf{v} = (v_{-N}, v_{-N+1}, \dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots, v_N, v_{N+1})$ ó $\mathbf{v} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)$. En cualquier caso podemos considerar a una función discreta definida para $j \in \mathbb{Z}$, además usamos la notación

$$h = \Delta x = \max_j \{ \Delta x_j \}$$

Ahora damos las definiciones de productos internos y normas discretas.

Espacios y Normas

Las diferentes normas finito dimensional que usaremos incluyen la **norma euclidiana** que depende de la malla

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^N |v_j|^2} \quad (1.4)$$

donde la suma es sobre todos los puntos de la malla, la **norma** $l_{2,\Delta x}$

$$\|\mathbf{v}\|_{2,\Delta x} = \sqrt{\sum_{j=1}^N |v_j|^2 \Delta x} \quad (1.5)$$

donde Δx es un factor de escala, asociado al tamaño de la malla

$$\Delta x = \max_j \{ x_{j+1} - x_j \}$$

y la **norma del supremo**

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \sup_{1 \leq j \leq N} |v_j| \quad (1.6)$$

y la **norma del supremo discreta**

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty,\Delta x} = \sup_{1 \leq j \leq N} |v_j| \Delta x \quad (1.7)$$

El **espacio de sucesiones infinito dimensional** que debemos incluir sobre \mathbb{R} o \mathbb{C} es el espacio l_2 ,

$$l_2 = \{\mathbf{v} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)^T : \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^2 < \infty\} \quad (1.8)$$

con **norma**

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^2} \quad (1.9)$$

con la **norma de la energía**; $l_{2,\Delta x}$,

$$\|\mathbf{v}\|_2 = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j|^2 \Delta x}, \quad (1.10)$$

y el espacio de todas las **sucesiones acotadas** l_∞ ,

$$l_\infty = \{\mathbf{v} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)^T : \sup_{-\infty < j < +\infty} |v_j| < \infty\} \quad (1.11)$$

con **norma**

$$\|\mathbf{v}\|_\infty = \sup_{-\infty < j < +\infty} |v_j| \quad (1.12)$$

y **norma discreta**

$$\|\mathbf{v}\|_{\infty, \Delta x} = \sup_{-\infty < j < +\infty} |v_j| \Delta x \quad (1.13)$$

Y, finalmente, cuando tomamos transformaciones encontramos el espacio infinito dimensional lineal sobre los complejos, las funciones cuadrado integrables de Lebesgue, $L_2(\mathbb{R})$,

$$L_2(\mathbb{R}) = \{v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx < \infty\} \quad (1.14)$$

con **norma**

$$\|v\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |v(x)|^2 dx \quad (1.15)$$

Discretización de la ecuación diferencial

El método de diferencias finitas también llamado método de Taylor [14], [17], porque usa la formulación de la serie de Taylor para realizar las aproximaciones de los operadores diferenciales por operadores en diferencias finitas.

Presentamos el teorema de Taylor como el instrumento básico para iniciar la discretización de los operadores diferenciales.

Teorema 1

Teorema de Taylor. Supongamos que $f \in C^n[a, b]$ y $f^{(n+1)}(x)$ existe en (a, b) . Sea $x_0 \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, existe $\zeta(x)$ entre x_0 y x tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) \quad (1.16)$$

donde

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k, \end{aligned}$$

es un polinomio de grado n alrededor de x_0 y

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

es el **residuo** o **error de truncamiento** asociado con el polinomio $P_n(x)$.

□ La expresión (1.16) se llama *Fórmula de Taylor* de orden n . Si denotamos por $x = x_0 + h$, el polinomio de Taylor y el residuo quedan escritos como

$$P_n(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)h^n}{n!} \quad (1.17)$$

y el residuo por

$$R_n(x_0 + h) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta(x))}{(n+1)!}h^{(n+1)}$$

También en nuestro análisis usaremos el teorema de Taylor en dimensiones mayores.

Teorema 2

Serie de Taylor en dos dimensiones Supongamos que $f \in C^{N+1}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sea $\mathbf{y}_0 = (x_0, t_0) \in \Omega$, entonces el valor de f en cualquier punto $(x, t) \in \Omega$, se puede

escribir como

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= f(\mathbf{y}_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{y}_0)(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{y}_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(\mathbf{y}_0)(x - x_0)^2 \\
 &+ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} f(\mathbf{y}_0)(x - x_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(\mathbf{y}_0)(t - t_0)^2 + \dots \\
 &+ \frac{1}{(N-m)!} \frac{1}{m!} \frac{\partial^N}{\partial x^{N-m} \partial t^m} f(\mathbf{y}_0)(x - x_0)^{N-m}(t - t_0)^m + R_{N+1} \\
 &= \sum_{j=0}^N \sum_{n=0}^{N-j} \frac{1}{j!n!} \frac{\partial^{j+n}}{\partial x^j \partial t^n} f(\mathbf{y}_0)(x - x_0)^j(t - t_0)^n + R_N
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

donde

$$R_N(x, t)$$

es el residuo multidimensional o **error de truncamiento**.

□

2.4 Definición.-

La función $g(h)$ es de orden $\mathcal{O}(h^p)$, $p > 0$, si y solo si existe una constante $M \geq 0$ tal que

$$|g(h)| \leq M h^p$$

□

Ahora determinamos los errores de de truncamiento local. Para ello usaremos la fórmula de Taylor de diferentes ordenes, por ejemplo para el orden $n = 1$ tenemos.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(\xi(x))h^2}{2!}, \quad x_0 < \xi(x) < x_0 + h$$

de allí podemos expresar

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \left(-\frac{f^{(2)}(\xi(x))h}{2!} \right) \tag{1.19}$$

Por lo tanto, se puede definir la primera aproximación

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1.20}$$

Observemos que el error de truncamiento es:

$$\tau(x_0, h) = -\frac{f^{(2)}(\xi)h}{2!} = \mathcal{O}(h)$$

donde $\mathcal{O}(h)$, se lee, orden de h y significa que la función del lado derecho se comporta en forma menor o igual que la función h

También podemos usar la fórmula de Taylor para aproximar la función en el punto $x = x_0 - h$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(\xi_1)h^2}{2!}, \quad x_0 - h < \xi_1 < x_0$$

de donde

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \left(-\frac{f^{(2)}(\xi_1)h}{2!} \right) \quad (1.21)$$

y se define otra primera aproximación como

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (1.22)$$

obteniendo el error de truncamiento

$$\tau(x_0, h) = -\frac{f^{(2)}(\xi_1)h}{2!} = \mathcal{O}(h)$$

Señalaremos que en ambos casos se han involucrado dos puntos. En el caso de la aproximación (1.20), se utilizaron los puntos x_0 y $x_0 + h$. En la aproximación (1.22) se utilizaron $x_0 - h$ y x_0 .

También podemos obtener otra aproximación involucrando tres puntos, tales como x_0 , $x_0 + h$, $x_0 - h$. Para ello sumamos (1.19) y (1.21) y despejando $f'(x_0)$ obtenemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \frac{h}{2} \left(f''(\xi_1) - f''(\xi) \right) \quad (1.23)$$

donde $x_0 - h < \xi_1 < x_0 < \xi < x_0 + h$. De allí podemos obtener la aproximación

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

con error de truncamiento

$$\tau(x_0, h) = \frac{h}{2} \left(f''(\xi_1) - f''(\xi) \right) \quad (1.24)$$

Esto significa que la pendiente de la secante a la gráfica de f que pasa por los puntos $(x_0 - h, f(x_0 - h))$ y $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ es mucho mejor aproximación a la pendiente

de la tangente que pasa por $(x_0, f(x_0))$, que la pendiente de las secantes que pasan por $(x_0 - h, f(x_0 - h))$, $(x_0, f(x_0))$ y por $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Esto quiere decir que el error de truncamiento en (1.24) debe ser el de mayor orden, lo cual se logra suponiendo que f es tres veces diferenciable.

Aplicando el *teorema del valor medio* en (1.24) tenemos;

$$\begin{aligned}\tau(x_0, h) &= \frac{h}{2} \left[f''(\eta)(\xi_1 - \xi) \right], \quad \xi_1 < \eta < \xi \\ &= \mathcal{O}(h^2), \quad \text{pues } \xi_1 - \xi \text{ es de orden } \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

El cálculo exacto del orden de truncamiento $\tau(x_0, h)$ se obtiene usando la fórmula de Taylor, cuyo orden es el que indica el exponente de h , en el caso que $n = 2$ tenemos

$$\begin{aligned}\tau(x_0, h) &= \frac{h^2}{3!} \left[f^{(3)}(\eta_1)(\xi_2 - \xi_1) \right], \quad \xi_2 < \eta_1 < \xi_1 \\ &= \mathcal{O}(h^2)\end{aligned}$$

el cual es un error de truncamiento de orden dos.

Presentamos la aproximación por diferencias finitas para la primera derivada. Para ello revisemos las aproximaciones presentadas anteriormente en forma detallada. Tomemos la fórmula de Taylor para $n = 2$.

1. Sea f una función de clase $C^{(2)}$ que cumple las condiciones del teorema de Taylor

$$f(x) = f(x_0)(x - x_0)^0 + f'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{f^{(2)}(\xi_{(x)})}{2}(x - x_0)^2 \quad (1.25)$$

si hacemos $h = x - x_0$ y reemplazamos en (1.25) tenemos

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0)h^0 + f'(x_0)h^1 + \frac{f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)})}{2}h^2 \\ f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)})}{2}h^2, \quad x_0 < \xi_{x_0+h} < x_0 + h\end{aligned}$$

despejando $f'(x_0)$ tenemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2}f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)}) \quad (1.26)$$

donde

$$-\frac{h}{2}f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)}) \in \mathcal{O}(h)$$

es decir

$$-\frac{h}{2}f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)}) \sim \mathcal{O}(h)$$

entonces la ecuación (1.26) se puede escribir en la forma

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

luego definamos la aproximación de la derivada por la diferencia finita

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (1.27)$$

La aproximación (1.27) es llamada aproximación por diferencias finitas **progresiva** o **hacia adelante** para f' , donde $\mathcal{O}(h)$ es llamado error de truncamiento de orden $p = 1$, este orden depende de la potencia de h y como aparece es $\mathcal{O}(h^p)$ e involucra dos puntos.

2. Usando la fórmula (1.25) con $x = x_0 - h$, $h > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f^{(2)}(\xi_{(x_0-h)})}{2}h^2 \\ f'(x_0) &= \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2!}f^{(2)}(\xi_{(x_0-h)}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

donde

$$+\frac{h}{2}f^{(2)}(\xi_{(x_0-h)}) \in \mathcal{O}(h)$$

es decir

$$+\frac{h}{2}f^{(2)}(\xi_{(x_0+h)}) \sim \mathcal{O}(h)$$

entonces tenemos que la expresión (1.28) se puede escribir en la forma

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h)$$

luego, se define la aproximación de diferencias finitas para la primera derivada

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \quad (1.29)$$

La ecuación (1.29) es llamada aproximación de diferencia finita **regresiva** o **hacia atrás** para $f'(x)$, donde $\mathcal{O}(h)$ es llamado error de truncamiento de orden $p = 1$, el cual depende de la potencia de h e incluye dos puntos.

3. Desarrollemos la fórmula de Taylor para $n = 3$,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)(x - x_0)^0 + f'(x_0)(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \frac{f^{(3)}(\xi_{(x)})}{3!}(x - x_0)^3 \end{aligned} \quad (1.30)$$

a. Sea $x - x_0 = h$, entonces reemplazando en (1.30)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_{(x_0+h)}) \quad (1.31)$$

b. Sea $x - x_0 = -h$, $h > 0$, entonces reemplazando en (1.30) obtenemos

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f^{(3)}(\xi_{(x_0-h)}) \quad (1.32)$$

restando (1.32) de (1.31) se tiene la ecuación

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2f'(x_0)h + \frac{h^3}{3!} \left[f^{(3)}(\xi_{(x_0+h)}) + f^{(3)}(\xi_{(x_0-h)}) \right]$$

despejando $f'(x_0)$, obtenemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{3!} \left[f^{(3)}(\xi_{(x_0+h)}) + f^{(3)}(\xi_{(x_0-h)}) \right] \quad (1.33)$$

donde

$$-\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi_{(x_0\pm h)}) \in \mathcal{O}(h^2)$$

es decir

$$-\frac{h^2}{3!}f^{(3)}(\xi_{(x_0\pm h)}) \sim \mathcal{O}(h^2)$$

La ecuación (1.33) se puede escribir en la forma

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Luego, se define la aproximación de diferencias finitas

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \quad (1.34)$$

La aproximación de diferencias (1.34) se llama aproximación por **diferencia central** para f' , donde $\mathcal{O}(h^2)$ es llamado error de truncamiento de orden $p = 2$.

Esta aproximación incluye tres puntos.

Usando la fórmula de Taylor se puede hallar otras aproximaciones para la primera derivada, las mismas que pueden involucrar más de tres puntos, y ser de mayor orden, como por ejemplo

$$f'(x_0) \approx \frac{6f(x_0 + h) - 3f(x_0) - 2f(x_0 - h) - f(x_0 + 2h)}{6h} \quad (1.35)$$

la cual es de tercer orden.

Ahora definamos las aproximaciones para la segunda derivada. Sea f una función de clase $C^{(3)}$, que satisface las condiciones del teorema de Taylor para $n = 3$, alrededor de un punto x_0

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)(x-x_0)^0 + f'(x_0)(x-x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 \\ &+ \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi_{(x_0+h)})}{4!}(x-x_0)^4 \end{aligned} \quad (1.36)$$

Sea $x - x_0 = h$, $h > 0$, sustituyendo en (1.36) tenemos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_{(x_0+h)}) \quad (1.37)$$

Sea $x - x_0 = -h$, $h > 0$, sustituyendo en (1.36) tenemos

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) - \frac{h^3}{3!}f'''(x_0) + \frac{h^4}{4!}f^{(4)}(\xi_{(x_0-h)}) \quad (1.38)$$

Sumando (1.37) y (1.38) tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) + f(x_0 - h) &= 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) \\ &+ 2\frac{h^4}{4!} \left[f^{(4)}(\xi_{(x_0+h)}) + f^{(4)}(\xi_{(x_0-h)}) \right] \end{aligned}$$

despejando $f''(x_0)$ obtenemos la ecuación

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \frac{h^2}{12} \left[f^{(4)}(\xi_{(x_0+h)}) + f^{(4)}(\xi_{(x_0-h)}) \right] \quad (1.39)$$

observando que

$$-\frac{h^2}{3!}f^{(4)}(\xi_{(x_0\pm h)}) \in \mathcal{O}(h^2) \quad (1.40)$$

es decir

$$-\frac{h^2}{3!}f^{(4)}(\xi_{(x_0\pm h)}) \sim \mathcal{O}(h^2) \quad (1.41)$$

entonces escribimos (1.39) como

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad (1.42)$$

luego, se define la aproximación de diferencias finitas

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \quad (1.43)$$

La aproximación (1.43) es llamada aproximación de **diferencia central** de $f''(x_0)$, donde $\mathcal{O}(h^2)$ es llamado error de truncamiento de orden $p = 2$.

1.3. Problema de valor inicial con condiciones de contorno

Un problema de ecuaciones diferenciales parciales se puede expresar en la siguiente forma

$$(P) \begin{cases} P(\partial_t, \partial_x)u = f & \text{en } \Omega \subset \mathbb{R}^n, t > 0 \\ u = g & \text{en } \partial\Omega \\ u(x, 0) = u_0 & \text{en } t = 0 \end{cases}$$

donde P es un polinomio de ecuaciones diferenciales.

Ejecutamos los tres pasos de discretización para un problema.

1. Discretización del dominio

Sean Δx y Δt números positivos que se pueden denotar por k y h respectivamente, entonces la malla está formada por los puntos $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ para enteros arbitrarios j y n . Para una función discreta v definida sobre la malla, denotamos sus valores por v_j^n en los puntos malla (x_j, t_n) . También usaremos la notación u_j^n para $u(x_j, t_n)$, donde u es una función continua en el plano xt . El conjunto de puntos (x_j, t_n) para un valor de n fijo es llamado **nivel de malla n** . La idea básica para el esquema de diferencias finitas es reemplazar derivadas por sus diferencias finitas. Tenemos ahora las fórmulas de aproximación para la derivada respecto a t en el nodo (jh, nk)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(jh, nk) &\approx \frac{u(jh, (n+1)k) - u(jh, nk)}{\Delta t} \\ &\approx \frac{u(jh, (n+1)k) - u(jh, (n-1)k)}{2\Delta t} \end{aligned}$$

Similares fórmulas aproximan las derivadas con respecto a x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(jh, nk) &\approx \frac{u((j+1)h, nk) - u(jh, nk)}{\Delta x} \\ &\approx \frac{u((j+1)h, nk) - u((j-1)h, nk)}{2\Delta x} \\ &\approx \frac{u(jh, nk) - u((j-1)h, nk)}{\Delta x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(jh, nk) &\approx \frac{u((j+1)h, nk) - 2u(jh, nk) + u((j-1)h, nk)}{(\Delta x)^2} \end{aligned}$$

2. Discretización de la variable

Se define una variable discreta

$$\begin{aligned} v_i : \{\tau\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (j, n) &\mapsto v(j, n) = v_j^n \end{aligned}$$

que aproxima la solución exacta por

$$u(x_j, t_n) = u_j^n \approx v_j^n$$

de tal manera que $v_j^0 = u_0(x_j)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Observe que la discretización de la variable significa definir la incógnita discreta que sea consistente con la discretización, con la condición inicial y las condiciones de contorno, si las hubiera.

3. Discretización de la ecuación diferencial

Discretizamos la ecuación que aparece en el problema **(P)** usando la serie de Taylor en el nodo $(j\Delta x, n\Delta t)$,

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u(j\Delta x, (n+1)\Delta t) = u(j\Delta x, n\Delta t) + \frac{\Delta t}{1!} \frac{\partial u}{\partial t}(j\Delta x, n\Delta t) \\ &\quad + \frac{\Delta t^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(j\Delta x, n\Delta t) + \dots \end{aligned}$$

La derivada de u respecto a t evaluada en los puntos $(j\Delta x, n\Delta t)$ es

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + \dots \quad (1.44)$$

Generalmente escribiremos esto utilizando la notación "big \mathcal{O} "

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{O}(\Delta t), \quad (1.45)$$

donde se asume que las derivadas de mayor orden de u en $(j\Delta x, n\Delta t)$ son acotadas. Entonces una aproximación de $u_t(j\Delta x, n\Delta t)$ puede ser dada por

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} \quad (1.46)$$

En forma similar para la segunda derivada de $u_{xx}(j\Delta x, n\Delta t)$

$$u_{xx}(x, t) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x - \Delta x, t)}{\Delta x^2} \quad (1.47)$$

la aproximación es dada por

$$\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.48)$$

Así las expresiones dadas en (1.46) y (1.48) pueden ser usadas para aproximar la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.49)$$

en el nodo $(j\Delta x, n\Delta t)$ por

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (1.50)$$

o escrito en forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = v_j^n + \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2} (v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (1.51)$$

Finalmente, es fácil ver que las condiciones iniciales y de frontera son aproximados por

$$v_j^0 = f(j\Delta x), \quad j = 0, \dots, M \quad (1.52)$$

$$v_0^{n+1} = a((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots \quad (1.53)$$

$$v_M^{n+1} = b((n+1)\Delta t), \quad n = 0, \dots \quad (1.54)$$

1.4. Convergencia

El concepto de convergencia es un concepto matemático familiar, conocido en la convergencia de sucesiones de números. Sin embargo, aquí se refiere al hecho de que son sucesiones de soluciones discretas obtenidas como soluciones de los problemas discretos que aproximan a la solución exacta de un problema continuo.

Las sucesiones de soluciones de los problemas discretos, que son soluciones aproximadas se obtienen cuando $\Delta x, \Delta t$ tiende a cero, [16], [17]. Por tanto, es suficiente utilizar los puntos de la malla, por lo que será necesario hablar de **convergencia puntual** y/o **convergencia uniforme**.

Una importante pregunta concerniente a las soluciones discretas obtenidas computacionalmente es, ¿Qué garantía puede ser dada para que la solución computacional sea próxima a la solución exacta de la ecuación diferencial parcial y bajo qué circunstancias la solución computacional coincide con la solución exacta?. La segunda parte de esta pregunta puede ser respondida requiriendo que la solución aproximada (computacional)

converja a la solución exacta cuando; $\Delta x, \Delta t$ tiende a cero. Sin embargo, convergencia es muy difícil de establecer directamente por tanto, una ruta indirecta es utilizar dos conceptos muy relacionados y que juntos implican convergencia mediante el teorema de Lax-Ritmeyer. Estos conceptos son consistencia y estabilidad.

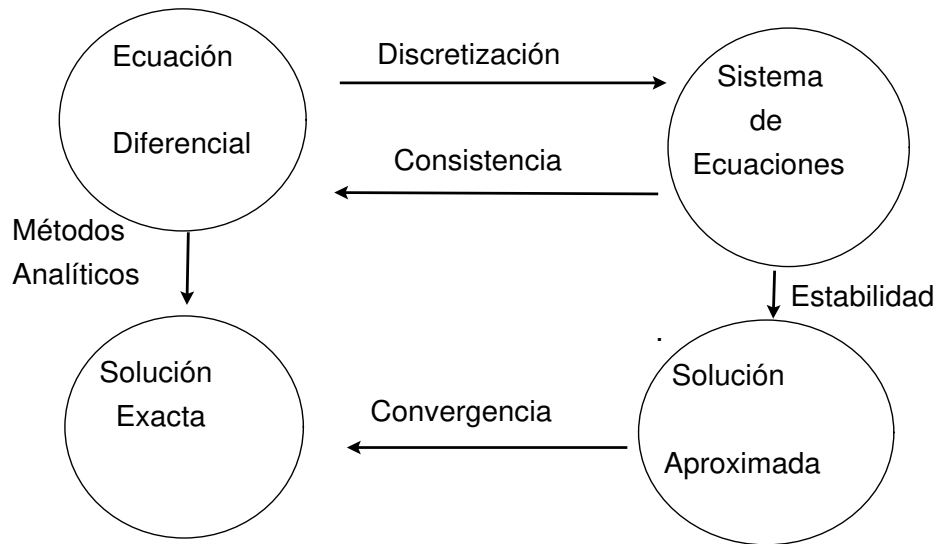


Figura 1.1: *Consistencia, estabilidad y convergencia*

Esta ruta indirecta requiere que el operador de diferencias discreto debe ser consistente con el operador diferencial parcial. Esto implica la inversa del proceso de discretización.

A través del desarrollo de la serie de Taylor se recuperan las ecuaciones diferenciales gobernantes cuando $\Delta x, \Delta t$ tienen a cero. Además, el algoritmo usado para resolver el sistema de ecuaciones algebraicas para obtener la solución aproximada debe ser estable.

El teorema de Lax-Ritmeyer es de gran importancia, puesto que es relativamente fácil demostrar la estabilidad de un algoritmo y la consistencia de la discretización con la ecuación diferencial parcial original, mientras que por lo general es muy difícil de mostrar la convergencia de las soluciones.

En realidad, la convergencia es necesaria medirla en alguna norma. Veamos la siguiente definición.

4.1 Definición.-

La sucesión de soluciones discretas $\{v_j^n\}$ converge en la norma $\|\cdot\|_{\Delta x}$ si y solo si

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\max_{j=0,1,\dots,T/\Delta t} \|e_j\|_{\Delta x} \right) = 0 \quad (1.55)$$

para cualquier condición inicial y para cada $T > 0$, $r = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ es constante cuando $\Delta x \rightarrow 0$, es decir, a medida que se refina la malla $(j\Delta x, n\Delta t) \rightarrow (x, t)$ si $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.

□

La diferencia entre la solución exacta de la ecuación diferencial parcial y la solución exacta del sistema de ecuaciones diferenciales es llamada **error de solución**, denotado por e_j^n , así que

$$e_j^n = u(x_j, t_n) - v_j^n \quad (1.56)$$

Recordemos que Φ satisface el problema

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0, \quad (1.57)$$

$$\Phi(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1.58)$$

$$\Phi(0, t) = g_1(t), \quad \Phi(1, t) = g_2(t), \quad t \geq 0 \quad (1.59)$$

Entonces las soluciones aproximadas $\{v_j^n\}$ del problema satisfacen

$$v_j^n = \Phi_j^n - e_j^n \quad (1.60)$$

Ahora escribimos el esquema de diferencias finitas de Euler hacia delante,

$$v_j^{n+1} - v_j^n - r(v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n) = 0 \quad (1.61)$$

que satisface las condiciones de contorno

$$v_0^n = g_1(t_n), \quad v_N^n = g_2(t_n), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.62)$$

Ahora reemplazando (1.60) en este esquema se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_j^{n+1} - e_j^{n+1} - (\Phi_j^n - e_j^n) &= r(\Phi_{j-1}^n - 2\Phi_j^n + \Phi_{j+1}^n) \\ &+ r(e_{j-1}^n - 2e_j^n + e_{j+1}^n) = 0 \end{aligned} \quad (1.63)$$

De ello se obtiene

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= re_{j-1}^n + (1-2r)e_j^n + re_{j+1}^n + \Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n \\ &+ r(2\Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n - \Phi_{j+1}^n) \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ahora utilizando el teorema de Taylor con $h = \Delta x$ y $k = \Delta t$ números positivos a fin de simplificar la notación para aproximar

$$\Phi_{j+1}^n = \Phi(x_j + h, t_n) = \Phi_j^n + h\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_{j,n} + \frac{h^2}{2!}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}\right)_{(x_j + \theta_1 h, t_n)} \quad (1.65)$$

$$\Phi_{j-1}^n = \Phi(x_j - h, t_n) = \Phi_j^n - h \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{j,n} + \frac{h^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{(x_j - \theta_2 h, t_n)} \quad (1.66)$$

y

$$\Phi_j^{n+1} = \Phi(x_j, t_n + k) = \Phi_j^n + k \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{(x_j, t_n + \theta_3 k)} \quad (1.67)$$

donde $0 < \theta_1, \theta_2, \theta_3 < 1$.

Sustituyendo (1.65), (1.66) y (1.67) en (1.64) se tiene

$$e_j^{n+1} = (r e_{j-1}^n + (1 - 2r) e_j^n + r e_{j+1}^n) + k \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{(x_j, t_n + \theta_3 k)} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{(x_j + \theta_4 h, t_n)} \right]$$

con $-1 < \theta_4 < 1$.

Por lo tanto, los errores e_j^n satisfacen las mismas condiciones que la solución. Ahora se define

$$E_n = \max_j |e_j^n| \quad (1.68)$$

el máximo error en el nivel n y también se define su máximo en toda la malla de la diferencia

$$M_{h,k} = \max_{(j,n)} \left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{(x_j, t_n + \theta_3 k)} - \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{(x_j + \theta_4 h, t_n)} \right| \quad (1.69)$$

para todo j y n . Sabiendo que $r = \frac{h}{k^2} > 0$ e imponiendo la condición $r \leq 0.5$ se tiene que todos los coeficientes de e son positivos o cero, por consiguiente se obtiene que

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq r |e_{j-1}^n| + (1 - 2r) |e_j^n| + r |e_{j+1}^n| + k M_{h,k} \\ &\leq r E_n + (1 - 2r) E_n + r E_n + k M_{h,k} \\ &= E_n + k M_{h,k}, \end{aligned} \quad (1.70)$$

para todo j . Es decir,

$$|e_j^{n+1}| \leq E_n + k M_{h,k} \quad (1.71)$$

Así (1.70) permite para todo j , y por lo tanto, para $\max_j |e_j^{n+1}|$ se cumple

$$E_{n+1} \leq E_n + k M_{h,k} \quad (1.72)$$

para todo n .

Luego recursivamente tenemos la cadena de desigualdades

$$E_{n+1} \leq E_n + k M_{h,k} \leq (E_{n-1} + k M_{h,k}) + k M_{h,k} = E_{n-1} + 2k M_{h,k} \quad (1.73)$$

y por consiguiente

$$E_n \leq E_0 + n k M_{h,k} = t_n M_{h,k} \quad (1.74)$$

donde $t_n = nk$ y puesto que los valores iniciales de v y Φ son los mismos se cumple $E_0 = 0$.

Además cuando $h \rightarrow 0$, $k = rh^2 \rightarrow 0$, $(jh, nk) \rightarrow (x, t)$ y la malla se refina que se tiene que $M_{h,k}$ tiende a

$$\max_{(x,t)} \left| \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_{(x,t)} \right| \quad (1.75)$$

Ahora puesto que Φ es solución de (1.57), se tiene que el valor límite de $M_{h,k}$ es cero. Por lo tanto, cuando $h, k \rightarrow 0$;

$$|\Phi_j^n - \phi_j^n| = |e_j^n| \leq \max_{(j,n)} |e_j^n| = E_n$$

es decir

$$|\Phi_j^n - \phi_j^n| \leq E_n \quad (1.76)$$

para todo n . Por tanto, se cumple que $v_j^n \rightarrow \Phi(x, t)$ cuando $(jh, nk) \rightarrow (x, t)$.

Se ha demostrado que v converge en la norma del máximo a Φ cuando $h \rightarrow 0$, $r \leq 1/2$ y t es finito. Cuando $r > 1/2$ puede demostrarse que el esquema no genera una sucesión de soluciones convergente.

Para esquemas de multipasos la definición asume que algún procedimiento inicial es usado para computar los primeros niveles de tiempo, necesarios para emplear los esquemas de multipasos. En el caso que los datos son especificados sobre estos primeros niveles de tiempo, las definiciones se modifican para requerir v_j^m , $0 \leq m \leq J$ converja a $v_0(x_j)$.

Considerar ahora la ecuación diferencial parcial en su forma general

$$\mathcal{L}u = F \quad (1.77)$$

la cual es una ecuación de primer orden en la derivada con respecto a t .

4.1. Convergencia de un problema de valor inicial

Un esquema de diferencias finitas tal como aquella que discutiremos es usado porque sus soluciones aproximan a las soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales. Pero realmente es necesario para que la solución de las ecuaciones en diferencias puedan aproximar a la solución de la ecuación diferencial parcial con cualquier precisión deseada. Así es necesario alguna clase de convergencia de la solución de la ecuación en diferencias a la solución de la ecuación diferencial parcial.

Empezamos considerando problemas de valor inicial. Así consideremos la ecuación diferencial parcial

$$\mathcal{L}u = F \quad (1.78)$$

donde las funciones u y F están definidas en toda la recta real y además se tiene la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Asumimos que hemos obtenido una solución aproximada de (1.78) por el esquema de diferencias finitas que denotaremos por L_j^n donde, n corresponde al paso del tiempo y j al punto espacial de la malla. Esta solución aproximada la denotaremos por v_j^n la cual está definida sobre toda la malla

$$\tau = \{(j\Delta x, n\Delta t), j = -\infty, \dots, +\infty, n = 0, \dots\}.$$

y por u la solución exacta de nuestro problema de valor inicial.

Empezamos dando la siguiente definición

4.2 Definición.-

Un esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = G_j^n$ que aproxima a la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$ es un esquema puntualmente convergente si para cualquier solución u de la ecuación diferencial tal que v_j^0 converge a $u_0(x)$, entonces v_j^n converge a $u(x, t)$ cuando Δx y Δt tienden a cero. \square

Para esquemas de multipasos la definición (4.2) asume algún procedimiento inicial usado para ocupar los primeros niveles de tiempo.

4.1.1 Ejemplo.-

Demostrar que la solución del esquema de diferencias finitas

$$v_j^{n+1} = (1 - 2r)v_j^n + r(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) \quad (1.79)$$

$$v_j^0 = f(jh), \quad -\infty < j < \infty \quad (1.80)$$

donde $r = \alpha k/h^2$, $0 \leq r \leq 1/2$, converge puntualmente a la solución del problema de valor inicial

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.81)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.82)$$

Solución. Debemos entender que estamos considerando un problema de valor inicial sobre todo \mathbb{R} , el índice j sobre v_j^n será el rango sobre todo los enteros, $-\infty < j < +\infty$.

Denotamos la solución exacta del problema de valor inicial (1.81)-(1.82) por u tal que

$$e_j^n = v_j^n - u(jh, nk) \quad (1.83)$$

Si introducimos u en la ecuación (1.79) y multiplicamos por k , vemos que $u_j^n = u(jh, nk)$ satisface

$$u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(kh^2) \quad (1.84)$$

Entonces sustrayendo la ecuación (1.84) de la ecuación (1.79), vemos que e_j^n satisface

$$e_j^{n+1} = (1 - 2r)e_j^n + r(e_{j+1}^n + e_{j-1}^n) + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(kh^2) \quad (1.85)$$

Si $0 < r < 1/2$, los coeficientes del lado derecho de la ecuación (1.85) son no-negativos y

$$|e_j^n| \leq (1 - 2r)|e_j^n| + r|e_{j+1}^n| + r|e_{j-1}^n| + A(k^2 + kh^2) \quad (1.86)$$

donde A es una constante asociada con el término "big \mathcal{O} " que depende de las hipótesis asumidas sobre las derivadas de orden superior. Por lo tanto, si tomamos la norma del supremo en el nivel n

$$E^n = \sup_{-\infty < j < +\infty} \{|e_j^n|\} \quad (1.87)$$

llegamos a

$$E^{n+1} \leq E^n + A(k^2 + kh^2) \quad (1.88)$$

Hay que notar que en el supremo sobre el lado derecho se incluyen los términos que contienen k y h . En este caso asumimos que la constante A es una cota de la segunda derivada con respecto al tiempo y la cuarta derivada con respecto al espacio en toda la recta real. Así hemos asumido que estas derivadas de la solución son uniformemente acotadas en toda la recta.

Aplicamos repetidamente (1.88) y llegamos a

$$E^{n+1} \leq E^n + A(k^2 + kh^2) \leq \dots \leq E^0 + (n+1)A(k^2 + kh^2) \quad (1.89)$$

Puesto que $E^0 = 0$, tenemos

$$E^{n+1} \leq (n+1)A(k^2 + kh^2) \quad (1.90)$$

De donde se tiene que

$$\left| v_j^{n+1} - u(jh, (n+1)k) \right| \leq (n+1)kA(k^2 + kh^2) \rightarrow 0 \quad (1.91)$$

cuando $k, h \rightarrow 0$.

Así vemos que para cualquier x y t , cuando k y h se aproximan a 0 en semejante forma que $(jh, (n+1)k) \rightarrow (x, t)$, v_j^n se aproxima a $u(x, t)$.

Deberíamos notar que puesto que $(n+1)$ en la ecuación (1.91) puede causar problemas en nuestra convergencia (no es bueno que tengamos términos que van al infinito en una expresión que deseamos que tienda a cero). Esto fue un hecho que en el último paso se tenga $(n+1)k \rightarrow t$. \square .

Ahora usamos la **norma del máximo** sobre el espacio de sucesiones acotadas, l_∞ ,

$$\|\mathbf{u}\|_\infty = \max_{-\infty < j < +\infty} |u_j| \quad (1.92)$$

Si $\mathbf{u}^n = (\dots, u_{-1}^n, u_0^n, u_1^n, \dots)^T$ y $\mathbf{v}^n = (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)^T$, entonces tenemos que probar que para t tal que $(n+1)k$ se aproxima a t , \mathbf{v}^{n+1} se aproxima a $u(\cdot, t)$ en la norma del máximo (1.92).

Puesto que, en general, la convergencia puntual es difícil de probar, cambiaremos la definición de convergencia en términos de la norma del máximo.

Por conveniencia denotamos el vector de valores de la solución de la ecuación de diferencias v_j^n en el nivel n por \mathbf{v}^n y el vector de valores en nk de la solución de la ecuación diferencial parcial evaluada en los puntos malla $u(jh, nk)$ por \mathbf{u}^n , generalizamos la definición de convergencia en la siguiente forma.

4.3 Definición.-

Un esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = G_j^n$, que aproxima a la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$, es un esquema convergente en la norma $\|\cdot\|$ en el tiempo t si cuando $(n+1)k \rightarrow t$,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\| \rightarrow 0 \quad (1.93)$$

cuando $h \rightarrow 0$ y $k \rightarrow 0$. \square

Debe especificarse que en la definición (1.96) no fue especificada la norma porque en diferentes situaciones, diferentes normas serán utilizadas.

Se probó que un esquema explícito (1.79) fue convergente de acuerdo a la definición (4.2) en la norma del supremo. En otras ocasiones veremos que la norma natural elegida será una variación de la norma L_2 y la norma $L_{2,h}$. Así, siempre que trabajemos con normas estas deben ser especificadas.

Debe quedar claro que la definición (4.3) difiere de la definición (4.2). Usando la definición (4.2), la razón de convergencia de v_j^n a $u(x, t)$ (razón en términos de $hx \rightarrow 0$ y $kt \rightarrow 0$) puede variar considerablemente para diferentes valores de x . Puede ocurrir, según la Definición (4.2), que un esquema converge en algunos valores de (x, t) y no en otros. Sin embargo, via la definición (4.3) (es decir $\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|$ es pequeño), entonces se obtiene que v_j^n esta proxima a u_j^n para todo j .

A veces deseamos discutir convergencia en términos de la rapidez en la cual la solución del esquema de diferencias converge a la solución de la ecuación diferencial parcial. Para este propósito utilizamos una definición de convergencia de orden (p, q) como sigue

4.4 Definición.-

Un esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = G_j^n$, que aproxima a la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$, es un esquema convergente de orden (p, q) en la norma $\|\cdot\|$, si para cualquier t , tal que $(n+1)k \rightarrow t$,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\| = \mathcal{O}(h^p) + \mathcal{O}(k^q) \quad (1.94)$$

cuando $h \rightarrow 0$ y $k \rightarrow 0$. \square

Cuando usamos la notación "big \mathcal{O} ", debemos recordar siempre que existe una constante involucrada, es decir, la ecuación (1.94) es realmente una notación corta para *existe una constante C tal que*

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\| \leq C(\mathcal{O}(h^p) + \mathcal{O}(k^q)) \quad (1.95)$$

En este caso la constante depende de t .

4.2. Convergencia de un problema de valor inicial-contorno

La diferencia entre convergencia en problemas de valor inicial y problemas de valor inicial-contorno está en los espacios que se usa. En la sección anterior, el espacio en el cual se ha trabajado es el espacio de sucesiones L_2 , el cual es un espacio infinito dimensional. Sin embargo, si consideramos el esquema de diferencias finitas sobre el intervalo $[0, 1]$ o más generalmente en el intervalo $[0, L]$, con condiciones de Dirichlet nulas, el problema discreto es un problema finito dimensional, es decir, está definido en \mathbb{R}_0^N .

Ahora, si $v_j^0 = f(j\Delta x)$, $j = 0, \dots, M$, $v_0^n = 0$, $n = 1, \dots$, y $v_M^n = 0$, $n = 1, \dots$, y encontramos que v_j^n , $j = 1, \dots, M-1$, $n = 1, \dots$. Cuando h es pequeño o M es grande, el vector desconocido será grande pero finito. Esto hace que no podamos medir adecuadamente la diferencia entre la solución del esquema de diferencias y la solución de la ecuación diferencial parcial. Es decir, no existe un espacio bueno en el cual la convergencia se pueda establecer.

Existen varias aproximaciones de cómo afrontar este problema. La aproximación que tomaremos requiere que $\Delta x \rightarrow 0$ de una manera ordenada y definir *la convergencia en términos de la norma de los espacios apropiados*.

Empezamos definiendo una partición del intervalo $[0, 1]$ en un malla uniforme descrito por un incremento h . Entonces considerar una sucesión de tales particiones con incrementos $\{\Delta x_i\}$, $i = 1, \dots, M$ tal que $\Delta x_i \rightarrow 0$ cuando $i \rightarrow \infty$. Sea X_i un espacio finito dimensional lineal normado conteniendo la solución asociada con el incremento Δx_i .

Denotamos una norma sobre X_i por $\|\cdot\|_i$, la definición de convergencia de un problema de valor inicial-contorno quedará expresado como sigue.

4.5 Definición.-

Un esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = G_j^n$, que aproxima a la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$, es un esquema convergente en la norma $\|\cdot\|_i$ en el tiempo t , si para cualquier sucesión de particiones Δx_i tal que $(n+1)\Delta t \rightarrow t$,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\|_i \rightarrow 0 \quad (1.96)$$

cuando $i \rightarrow \infty$ y $\Delta t \rightarrow 0$. \square

En una forma similar, se puede definir convergencia de orden (p, q) .

Aunque para satisfacer la definición (4.5) debemos considerar todas las particiones que converjan a cero, el modelo para usar la definición (4.5) es usar el dominio $[0, 1]$ y $h = 1/M$. Entonces el espacio obtenido será finito dimensional, de orden $M-1$, M o $M+1$, dependiendo de que tipo de condiciones de frontera son usadas en los extremos del intervalo. Sin embargo, como veremos más adelante, probar convergencia para un problema de valor inicial y de frontera es más complicado que hacerlo para problemas de valor inicial.

Para ilustrar la definición (4.5) nuevamente probaremos la convergencia del esquema explícito (1.79), esta vez para el problema de valor inicial-frontera.

4.2.1 Ejemplo.-

Demostrar que para $0 \leq r \leq 1/2$ la solución del esquema de diferencias del problema de valor inicial discreto y de contorno

$$v_j^{n+1} = (1-2r)v_j^n + r(v_{j-1}^n + v_{j+1}^n), \quad n \geq 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (1.97)$$

$$v_0^{n+1} = v_M^{n+1} = 0 \quad n \geq 0 \quad (1.98)$$

$$v_j^0 = f(j\Delta x), \quad j = 0, \dots, M \quad (1.99)$$

converge en la norma del supremo a la solución del problema de valor inicial-frontera

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.100)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.101)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.102)$$

Solución. Probamos convergencia del esquema (1.97)-(1.99) en la misma forma que se prueba para un problema de valor inicial, excepto en este caso nuestro vector tiene longitud finita y el tamaño irá modificándose. También porque hacemos esto en forma similar, eventualmente tenemos que hacer varias suposiciones para hacer el trabajo de prueba. Empezamos escribiendo Δx_m como el incremento en una partición con $M_m + 1$

puntos. Sea X_m el espacio de $(M_m - 1)$ vectores en \mathbb{R}^{M_m-1} con norma del supremo finito dimensional,

$$\|(v_1, \dots, v_{M_m-1})^T\|_{M_m-1, \infty} = \sup_{1 \leq j \leq M_m-1} |v_j|$$

Haciendo

$$e_j^n = v_j^n - u(j\Delta x_m, n\Delta t)$$

Como vimos anteriormente e_j^n satisface

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} &= (1 - 2r)e_j^n + r(e_{j-1}^n + e_{j+1}^n) \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t(\Delta x_m)^2), \quad j = 1, \dots, M_m - 1 \end{aligned} \quad (1.103)$$

Si $0 < r \leq 1/2$, los coeficientes del lado derecho de la ecuación (1.103) son no negativos, donde e_0^n y $e_{M_m}^n$ son ambos ceros, y

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq (1 - 2r)|e_j^n| + r|e_{j-1}^n| + r|e_{j+1}^n| + A(\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t(\Delta x_m)^2)) \\ &\leq \|\mathbf{e}^n\|_{M_m-1, \infty} + A(\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta t(\Delta x_m)^2)) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{e}^n = (e_1^n, \dots, e_{M_m-1}^n)^T$$

Si tomamos el supremo sobre el lado izquierdo de la desigualdad anterior y aplicamos repetidamente esta desigualdad, entonces tenemos

$$\|\mathbf{e}^{n+1}\|_{M_m-1, \infty} \leq (n+1)\Delta t A(\Delta t + (\Delta x_m)^2)$$

Por lo tanto, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $(n+1)\Delta t \rightarrow t$, y $m \rightarrow \infty$,

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{v}^{n+1}\|_{M_m-1, \infty} \rightarrow 0, \quad (1.104)$$

puesto que $\Delta x_m \rightarrow 0$, se tiene que el esquema es convergente. \square

1.5. Consistencia

En esta sección trataremos sobre el problema de aproximación de operadores diferenciales, es decir, qué tan próximo se encuentra el operador diferencial continuo y el operador de diferencias finitas.

5.1. Consistencia de problemas de valor inicial

5.1 Definición (Consistencia Puntual).-

El esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = G_j^n$ es puntualmente consistente con la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$ en el punto (x, t) si para cualquier función suave $\phi = \phi(x, t)$, se tiene que

$$(\mathcal{L}u - F)|_j^n - (L_j^n \phi_j^n - G_j^n) \rightarrow 0$$

cuando $h, k \rightarrow 0$ y $(jh, nk) \rightarrow (x, t)$. \square

Asumiendo que estamos trabajando con un esquema de diferencias de dos niveles y una ecuación diferencial parcial de primer orden en la variable t ; el esquema de diferencias finitas se escribe en la forma:

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n + k\mathbf{G}^n$$

donde

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^n &= (\dots, v_{-1}^n, v_0^n, v_1^n, \dots)^T, \\ \mathbf{G}^n &= (\dots, G_{-1}^n, G_0^n, G_1^n, \dots)^T\end{aligned}$$

y Q es un operador de diferencias que actúa sobre un espacio apropiado, entonces una definición de consistencia puede ser dada en función de una norma.

5.2 Definición.-

El esquema de diferencias finitas (5.1) es consistente con la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$ en la norma $\|\cdot\|$ si la solución de la ecuación diferencial parcial, u , satisface

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + k\mathbf{G}^n + k\boldsymbol{\tau}^n, \quad (1.105)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^n$ es el error de truncamiento y satisface

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| \rightarrow 0 \quad (1.106)$$

cuando $h, k \rightarrow 0$. \square

Una simple variación de la definición (5.2) es dada cuando se quiere precisar de consistencia.

5.3 Definición.-

El esquema de diferencias finitas (5.1) se dice que es consistente de orden de precisión (p, q) con la ecuación diferencial parcial $\mathcal{L}u = F$ si

$$\|\boldsymbol{\tau}^n\| = \mathcal{O}(h^p) + \mathcal{O}(k^q) \quad (1.107)$$

donde $\boldsymbol{\tau}^n$ o $\|\boldsymbol{\tau}^n\|$ es el **error de truncamiento**. \square

5.1.1 Ejemplo.-

Discutir la consistencia del esquema explícito de Euler

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2}, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}^{\mathbb{T}} \quad (1.108)$$

con la ecuación diferencial parcial

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0 \quad (1.109)$$

Solución. Si denotamos la solución de la ecuación diferencial parcial (1.109) por u , e insertando u en la expresión (1.108) se obtiene

$$(u_j^{n+1} - u_j^n) - r(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(kh^2) \quad (1.110)$$

donde $r = \alpha k/h^2$. Para aplicar las definiciones (5.2)-(5.3) debemos ser cuidadosos de lo que esta contenido en $\mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(h^2)$. Si asumimos que la segunda derivada de u con respecto a t y la cuarta derivada de u con respecto a x existe y es acotada en alguna vecindad del punto (x, t) , la expresión (1.110) implicará que el esquema de diferencias (1.108) es puntualmente consistente con la ecuación diferencial parcial (1.109).

Para mostrar que el esquema (1.108) es consistente, de orden de precisión (h^2, k) , escribimos primero el esquema (1.108) en forma explícita,

$$v_j^{n+1} = v_j^n + r(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (1.111)$$

La ecuación (1.111) nos da cada componente de una ecuación en la forma de (1.96) con $G^n = 0$.

Ahora de (1.105) y de la fórmula de Taylor se tiene:

$$\begin{aligned}
 {}^k \tau_j^n &= u_j^{n+1} - \{u_j^n + r[u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n]\} \\
 &= u_j^n + (u_t)_j^n \Delta t + u_{tt}(j\Delta x, t_1) \frac{\Delta t^2}{2} \\
 &\quad - \{u_j^n + r[v_j^n + (u_x)_j^n \Delta x + (u_{xx})_j^n \frac{\Delta x^2}{2} + (u_{xxx})_j^n \frac{\Delta x^3}{6} \\
 &\quad + u_{xxx}(x_1, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{24} - 2u_j^n + u_j^n - (u_x)_j^n \Delta x \\
 &\quad + (u_{xx})_j^n \frac{\Delta x^2}{2} - (u_{xxx})_j^n \frac{\Delta x^3}{6} + u_{xxx}(x_2, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{24}]\} \dots \\
 &= (u_t)_j^n \Delta t - r\Delta x^2 (u_{xx})_j^n + u_{tt}(j\Delta x, t_1) \frac{\Delta t^2}{2} \\
 &\quad - ru_{xxx}(x_1, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{24} - ru_{xxx}(x_2, n\Delta t) \frac{\Delta x^4}{24} \dots \\
 &= (u_t - \alpha u_{xx})_j^n \Delta t + u_{tt}(j\Delta x, t_1) \frac{\Delta t^2}{2} \\
 &\quad - \alpha u_{xxx}(x_1, n\Delta t) \frac{\Delta x^2}{24} \Delta t - \alpha u_{xxx}(x_2, n\Delta t) \frac{\Delta x^2}{24} \Delta t \dots
 \end{aligned}$$

Del hecho que $u_t - \alpha u_{xx} = 0$ se tiene:

$$\tau_j^n = u_{tt}(j\Delta x, t_1) \frac{\Delta t}{2} - \alpha(u_{xxx}(x_1, n\Delta t) + u_{xxx}(x_2, \Delta t)) \frac{\Delta x^2}{24} \quad (1.112)$$

Ahora decidiremos que norma usar:

1. Si asumimos que u_{tt} y u_{xxx} son uniformemente acotadas sobre $\mathbb{R} \times [0, t_0]$, para algún $t_0 > t$, podemos entonces usar estas cotas con la norma del supremo para obtener

$$\|\tau\|_\infty = \sup_i \{\tau_i\} = \sup |u_{tt}(jh, t)| \frac{k}{2} + \sup_i |u_{xxx}| \frac{h^2}{12} \leq Ak + Bh^2$$

Por lo tanto, el esquema es de *orden de precisión* (h^2, k) con respecto a la norma del supremo.

2. Si asumimos que u_{tt} y u_{xxx} satisfacen

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} [(u_{tt})_j^n]^2 h < A < \infty \quad (1.113)$$

y

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} [(u_{xxx})_j^n]^2 h < B < \infty \quad (1.114)$$

para cualquier h y k . Entonces decimos que el esquema de diferencias finitas es de orden de precisión (h, k) con respecto a la norma $l_{2,h}$.

□

5.2. Consistencia de problemas de valor inicial-contorno

La consistencia puntual será la misma que aparece en la definición (5.1), excepto que ahora tenemos que analizar cualquier condición de frontera que contiene una aproximación.

Para la **norma** consideremos una sucesión de particiones del intervalo $[0, 1]$ definiendo una sucesión de incrementos espaciales $\{\Delta x_j\}$ y una sucesión de espacios apropiados, $\{X_j\}$, con normas $\|\cdot\|_j$. Entonces las Definiciones (5.2) y (5.3) se aplican a problemas de valor inicial-contorno usando la sucesión de normas $\|\cdot\|_j$. La diferencia importante entre los problemas de valor inicial y problemas de valor inicial-contorno está en escribir el problema de valor inicial-contorno en alguna forma que pueda ser analizada en una sucesión lógica de espacios vectoriales.

5.2.1 Ejemplo.-

Problema discreto con el esquema de diferencias finitas de Euler

$$v_j^{n+1} = (1 - 2r)v_j^n + r(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n), \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (1.115)$$

$$v_j^0 = f(j\Delta x) \quad (1.116)$$

$$v_M^{n+1} = 0 \quad (1.117)$$

$$v_0^{n+1} = (1 - 2r)v_0^n + 2ru_1^n \quad (1.118)$$

$$j = 1, \dots, M-1 \quad (1.119)$$

con el problema de valor inicial-contorno

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.120)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad (1.121)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.122)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.123)$$

$$x \in [0, 1] \quad (1.124)$$

Solución: La condición de frontera (1.123) se puede aproximar por

$$\frac{v_1^n - v_{-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (1.125)$$

Recordar que el esquema de diferencias de Euler (1.115) aproxima a la ecuación diferencial parcial (1.120) con un orden de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$. Desde que (1.118) es una aproximación de orden $\mathcal{O}(\Delta x)^2$ para la condición de frontera (1.123), se concluye que el esquema de diferencias (1.115)-(1.118) es una aproximación puntual de orden $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$ para el problema de valor inicial-frontera (1.120)-(1.123).

Para probar la **consistencia** en la norma, escribimos nuestro esquema de diferencias en la forma

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n \quad (1.126)$$

con componentes

$$v_j^{n+1} = [(1-2r)I + r(\delta_+ + \delta_-)] v_j^n$$

Si \mathbf{u} es la solución exacta del problema de valor inicial-frontera continuo, entonces podemos reemplazarlo en (1.126) y obtenemos

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \quad (1.127)$$

Antes de empezar nuestro análisis de consistencia, debemos decidir sobre nuestra sucesión de espacios. Es claro que los espacios que usaremos serán espacios de dimensión M que constan de vectores $(v_0, \dots, u_{M-1})^T$. Ya conocemos que τ_j^n es $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$, $j = 1, \dots, M-1$. Para examinar la consistencia de la ecuación primero examinemos la consistencia de la discretización en la frontera (1.118), sea u la solución del problema de valor inicial-contorno, entonces:

$$\begin{aligned} \Delta t \tau_0^n &= u_0^{n+1} - (1-2r)u_0^n - 2ru_1^n \\ &= u_0^n + (u_t)_0^n \Delta t + (u_{tt})_0^n \frac{\Delta t^2}{2} + \dots \\ &\quad - [(1-2r)u_0^n \\ &\quad + 2r\{u_0^n + (u_x)_0^n \Delta x + (u_{xx})_0^n \frac{\Delta x^2}{2} + (u_{xxx})_0^n \frac{\Delta x^3}{6} + \dots\}] \\ &= [(u_t)_0^n - \alpha(u_{xx})_0^n] \Delta t - 2r\Delta x(u_x)_0^n + (u_{tt})_0^n \frac{\Delta t^2}{2} \\ &\quad - (u_{xxx})_0^n \frac{\alpha \Delta t \Delta x}{3} + \dots \end{aligned}$$

Usando el hecho que $(u_x)_0^n = 0$ y $(u_t - \alpha u_{xx})_0^n = 0$, vemos que

$$\tau_0^n = \frac{\Delta t}{2}(u_{tt})_0^n - \Delta x \frac{\alpha}{3}(u_{xxx})_0^n + \dots \sim \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x) \quad (1.128)$$

Podemos decir que los puntos $j = 1, \dots, M$ el esquema de diferencias es de orden de precisión $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$. Pero en el extremo izquierdo cuando $j = 0$ el esquema es

solo de orden de precisión $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$. Por lo tanto, el esquema (1.115)-(1.118) es de orden de precisión $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$. Debido a la aproximación de la ecuación diferencial parcial y a las condiciones de frontera escogemos la menor orden respecto a Δx .

En conclusión, vemos que con las suposiciones hechas sobre ciertas derivadas de u , el esquema de diferencias (1.115)-(1.118) será consistente con respecto a la norma del supremo o la norma $l_{2,\Delta x}$ con orden de aproximación $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)$

■

5.2.2 Ejemplo.-

El esquema forward-time forward-space o upwind hacia delante es consistente con la ecuación diferencial de convección $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x}$.

Solución. En efecto, el esquema es

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = 0,$$

el operador diferencial para la ecuación de convección es

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$$

y sea una función suave $\phi = \phi(x, t)$. El operador de diferencias finitas esta dado por

$$L_j^n \phi = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{k} + a \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_j^n}{h} \quad (1.129)$$

donde $\phi_j^n = \phi(jh, nk)$. Usando las series de Taylor de la función $\phi(x, t)$ en el nodo (jh, nk) ,

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + k\phi_t + \frac{1}{2!}k^2\phi_{tt} + \mathcal{O}(k^3) \quad (1.130)$$

$$\phi_{j+1}^n = \phi_j^n + h\phi_x + \frac{1}{2!}h^2\phi_{xx} + \mathcal{O}(h^3) \quad (1.131)$$

donde las derivadas son evaluadas en los nodos (x_j, t_n) . Reemplazando (1.130) y (1.131) en (1.129) obtenemos

$$\begin{aligned} L_j^n \phi &= \phi_t + \frac{1}{2}k\phi_{tt} + \mathcal{O}(k^2) + a\left\{\phi_x + \frac{1}{2}h\phi_{xx} + \mathcal{O}(h^2)\right\} \\ &= \phi_t + \frac{1}{2}k\phi_{tt} + a\phi_x + \frac{a}{2}h\phi_{xx} + \mathcal{O}(k^2) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (L\phi)_j^n - L_j^n \phi &= \phi_t + a\phi_x - \phi_t - \frac{1}{2}k\phi_{tt} - a\phi_x - \frac{a}{2}\phi_{xx} \\ &\quad - \mathcal{O}(k^2) - \mathcal{O}(h^2) \\ &= -\frac{1}{2}k\phi_{tt} - \frac{a}{2}h\phi_{xx} - \mathcal{O}(k^2) - \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(L\phi)_j^n - L_j^n \phi \rightarrow 0; \quad h, k \rightarrow 0$$

y así concluimos que el esquema es puntualmente consistente. ■

Es natural preguntarse, ¿ Si consistencia es **suficiente** para que un esquema sea convergente ?. En verdad, consistencia es **necesaria** para convergencia mas no es suficiente, como veremos en el siguiente ejemplo.

5.2.3 Ejemplo.-

Considerar la ecuación diferencial parcial

$$u_t + au_x = 0, \quad a > 0, x \in \mathbb{R} \quad (1.132)$$

con la condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (1.133)$$

y el esquema FTFT o Upwind hacia delante con $a = 1$,

$$\frac{v_j^{n+1} + v_j^n}{k} + \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = 0 \quad (1.134)$$

El esquema puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - \frac{k}{h}(v_{j+1}^n - v_j^n) \\ &= (1 + C_r)v_j^n - C_r v_{j+1}^n \end{aligned}$$

donde $C_r = \frac{k}{h}$. La solución de la ecuación diferencial parcial es una copia de u_0 que se desplaza a la derecha por t siguiendo la dirección de las características. En particular, para un t suficientemente grande, existe valores positivos de x para el cual $u(x, t)$ no es cero, Figura (??). Para el esquema de diferencias tomemos la condición inicial

$$u_j^0 = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq jh \leq 0 \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar} \end{cases}$$

La ecuación (1.134) muestra que la solución en (x_j, t_n) depende solo de $x_{j'}$ para $j' > j$ en el tiempo previo. Así concluimos que

$$v_j^n = 0, \quad j > 0, n \geq 0$$

Por lo tanto, v_j^n no puede converger a $u(x, t)$, puesto que para t positivo y x , la función u no es idénticamente cero, sin embargo v_j^n es cero. ■

Note que concluimos que el esquema es no convergente sin especificar el tipo de convergencia, pero ciertamente una sucesión de funciones que son todas ceros - esto es, v_j^n para $j > 0$ - no puede converger, bajo cualquier definición razonable de convergencia, a la función diferente de cero u .

En seguida demostraremos que el esquema de Lax-Friedrichs es consistente con la ecuación diferencial $u_t + au_x = 0$.

5.2.4 Ejemplo.-

El esquema de Lax-Friedrichs es puntualmente consistente con la ecuación diferencial $u_t + au_x = 0$.

En efecto, sea el esquema de Lax-Friedrichs

$$\frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)}{k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0$$

y sea el operador de diferencias finitas

$$L_j^n \phi = \frac{\phi_j^{n+1} - \frac{1}{2}(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n)}{k} + a \frac{\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n}{2h}$$

donde $\phi = \phi(x, t)$ es una función lo suficientemente diferenciable. Usando las series de Taylor

$$\begin{aligned} \phi_{j+1}^n &= \phi_j^n + h\phi_x + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} + \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) \\ \phi_{j-1}^n &= \phi_j^n - h\phi_x + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} - \frac{1}{3!}h^3\phi_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) \\ \phi_j^{n+1} &= \phi_j^n + k\phi_t + \frac{1}{2}k^2\phi_{tt} + \mathcal{O}(k^3) \\ \frac{1}{2}(\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n) &= \phi_j^n + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} + \mathcal{O}(h^4) \\ \frac{1}{2h}(\phi_{j+1}^n - \phi_{j-1}^n) &= \phi_x + \frac{1}{3!}h^2\phi_{xxx} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Si reemplazamos en el operador de diferencias obtenemos

$$L_j^n \phi = \phi_t + \frac{1}{2}k\phi_{tt} - \frac{1}{2}h^2k^{-1}\phi_{xx} + a\phi_x + \frac{1}{3!}ah^2\phi_{xxx} + \mathcal{O}(k^2 + h^4k^{-1} + h^4)$$

de donde

$$L\phi_j^n - L_j^n\phi = -\frac{1}{2}k\phi_{tt} + \frac{1}{2}h^2k^{-1}\phi_{xx} - \frac{1}{3!}ah^2\phi_{xxx} + \mathcal{O}(h^4 + k^{-1}h^4 + k^2)$$

Para que $L\phi_j^n - L_j^n\phi \rightarrow 0$, $h, k \rightarrow 0$ se debe tener que $k^{-1}h^4 \rightarrow 0$. Por lo tanto, el esquema es puntualmente consistente siempre que $k^{-1}h^4 \rightarrow 0$. ■

1.6. Estabilidad

Consistencia no es suficiente para obtener convergencia, ya que muchos de los esquemas utilizados son consistentes pero no convergentes. El mayor problema en probar convergencia está en obtener la estabilidad del esquema. Aunque estabilidad es mucho más fácil de establecer que convergencia, esto es aún muchas veces difícil.

Estabilidad significa que los errores en cualquier etapa de cálculo no son amplificados, sino que son atenuados conforme el cálculo avanza. Si ningún error de redondeo se introdujera en este proceso, entonces la solución exacta se obtendría en cada punto de la malla (j, n) . La idea esencial de la definición de estabilidad es que el proceso numérico no debería causar ninguna pequeña perturbación introducida a través de redondeos de cualquier tipo de crecimiento y finalmente dominar la solución.

Note que si un esquema es convergente, entonces v_j^n converge a $u(x, t)$, ciertamente v_j^n es acotada en algún sentido. En este contexto, estos conceptos que estamos utilizando son aplicables a los llamados *problemas bien puestos*.

La siguiente definición de estabilidad es para *problemas de valor inicial homogéneos*.

6.1 Definición (Estabilidad de PVI homogéneos).-

Un esquema de diferencias finitas $L_j^n v_j^n = 0$ para una ecuación diferencial de primer orden, $Lu = 0$ es estable si existe un entero J y números positivos h_0 y k_0 , tal que para cualquier tiempo positivo T existe una constante C_T tal que

$$h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \quad (1.135)$$

para $0 \leq nk \leq T$, $0 < h \leq h_0$, $0 < k \leq k_0$. □

6.2 Definición (Problemas bien Puestos).-

El problema de valor inicial para una ecuación diferencial parcial de primer orden $\mathcal{L}u =$

0 es bien puesto si para cualquier tiempo $T \geq 0$, existe una constante C_T tal que para cualquier solución $u(x, t)$ satisface

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, t)|^2 dx \leq C_T \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x, 0)|^2 dx$$

$$0 \leq t \leq T \quad (1.136)$$

□

6.1. Análisis de estabilidad matricial

La primera aproximación para el análisis de estabilidad se llama **análisis de estabilidad matricial**.

Para establecer un criterio de estabilidad matricial considerar el siguiente ejemplo.

6.1.1 Ejemplo.-

Dada la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (1.137)$$

con

$$\phi(0, t) = a, \quad \phi(1, t) = b, \quad 0 \leq t \leq T$$

y

$$\phi(x, 0) = g(x), \quad 0 < x < 1$$

Sea el esquema de diferencias finitas de Euler definido en un punto interior general

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + r(\phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j+1}^n) \quad (1.138)$$

para $j = 1, \dots, N$ y $Nh = 1$, $n = 0, \dots, J$ con $Jk = T$.

En efecto, sobre las fronteras se tiene

$$\phi_1^{n+1} = \phi_1^n + r(a - 2\phi_1^n + \phi_2^n)$$

y

$$\phi_{N-1}^{n+1} = \phi_{N-1}^n + r(\phi_{N-2}^n - 2\phi_{N-1}^n + b)$$

donde $Nh = 1$.

Este esquema puede ser escrito en la forma matricial en el nivel n ; si denotamos por

$$\phi^{n+1} = \begin{pmatrix} \phi_1^{n+1} \\ \phi_2^{n+1} \\ \vdots \\ \phi_{N-2}^{n+1} \\ \phi_{N-1}^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$\phi^{n+1} = \begin{pmatrix} 1-2r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^n \\ \phi_2^n \\ \vdots \\ \phi_{N-2}^n \\ \phi_{N-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ra \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rb \end{pmatrix}$$

o en su forma compacta como

$$\phi^{n+1} = A\phi^n + \mathbf{d} \quad (1.139)$$

donde A y \mathbf{d} son conocidos. Puesto que en general los esquemas en diferencias para la ecuación diferencial parabólica puede ser escrita en la forma de matriz y d^n depende de las condiciones de frontera y puede variar a medida que avanza el tiempo.

El dominio solución de la ecuación diferencial parcial es un rectángulo finito $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq t \leq T$, el cual es subdividido en una malla uniforme con $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, N$ ($Nh = 1$) y $t_n = nk$, $n = 0, 1, \dots, T$ ($nk = T$). Ahora asumiremos que h y k están relacionados (por ejemplo $k = C_r h$ o $k = rh^2$, $r > 0$), así que $k \rightarrow 0$ cuando $h \rightarrow 0$. Si las condiciones de frontera en $j = 0$ y $j = N$ ($n > 0$) son conocidos, entonces las ecuaciones para $i = 1, 2, \dots, N$ pueden escribirse como

$$\phi^{n+1} = A\phi^n + \mathbf{d}^n \quad (1.140)$$

Aplicando recursivamente (1.140) tenemos

$$\begin{aligned} \phi^n &= A\phi^{n-1} + d^{n-1} = A(A\phi^{n-2} + d^{n-2}) + d^{n-1} \\ &= A^2\phi^{n-2} + Ad^{n-2} + d^{n-1} \\ &\vdots \\ &= A^n\phi^0 + A^{n-1}d^0 + \dots + d^{n-1} \end{aligned} \quad (1.141)$$

donde ϕ^0 es el vector de valores iniciales y d^0, \dots, d^{n-1} son vectores de los valores conocidos en la frontera.

La próxima tarea es considerar la propagación de una perturbación y para este fin considerar el vector de valores iniciales ϕ^0 , el cual perturbado es ϕ^{0*} (asumimos no más errores de redondeo), entonces la solución exacta en el paso $t_n = nk$ de tiempo es

$$\phi^{n*} = A^n \phi^{0*} + A^{n-1} d^0 + A^{n-2} d^1 + \dots + d^{n-1} \quad (1.142)$$

Definimos el error de perturbación o vector error \mathbf{e} por $\mathbf{e} = \phi^* - \phi$. Entonces de (1.141) y (1.142) tenemos

$$\mathbf{e}^n = \phi^{n*} - \phi^n = A^n(\phi^{0*} - \phi^0) = A^n \mathbf{e}^0, \quad n = 1, \dots, T \quad (1.143)$$

El esquema de diferencias finitas será estable cuando los restos de \mathbf{e}^n serán acotados cuando n se incrementa indefinidamente. En otras palabras \mathbf{e}^0 se propaga de acuerdo a

$$\mathbf{e}^n = A \mathbf{e}^{n-1} = \dots = A^n \mathbf{e}^0 \quad (1.144)$$

Por consiguiente, por la matriz compatible y norma de un vector

$$\|\mathbf{e}^n\| \leq \|A^n\| \|\mathbf{e}^0\| \quad (1.145)$$

Lax define el esquema de diferencias como estable si existe $M > 0$ (independiente de n, h y k) tal que $\|A^n\| \leq M$, $n = 1, \dots, T$. Esta condición ciertamente limita la amplificación de cualquier perturbación inicial y por lo tanto cualquier error de redondeo puesto que

$$\|\mathbf{e}^n\| \leq M \|\mathbf{e}^0\|$$

Desde que

$$\|A^n\| = \|AA^{n-1}\| \leq \|A\| \|A^{n-1}\| \leq \dots \|A\|^n \quad (1.146)$$

la definición de estabilidad de Lax es satisfecha si $\|A\| \leq 1$.

Cuando esta condición es satisfecha se sigue inmediatamente que el radio espectral $\rho(A) \leq 1$ ■

6.1.1 Nota.-

La **norma uno** de la matriz A es la suma máxima de los módulos de las columnas de A y se denota por $\|A\|_1$. La **norma infinita** de la matriz A es la suma máxima de los módulos de las filas de A y se denota por $\|A\|_\infty$. La **norma dos** de la matriz A es la raíz cuadrada del radio espectral de $A^H A$ donde $A^H = (\bar{A})^T$ (transpuesta de la conjugada de A) y se denota por $\|A\|_2$.

$$\rho(A) \leq 1 \text{ desde que } \rho(A) \leq \|A\| \quad (1.147)$$

(el recíproco no es cierto).

6.1.2 Ejemplo.-

Existen dos formas para analizar la estabilidad por medio de matrices: encontrar los autovalores de A explícitamente o usar normas para obtener cotas sobre los autovalores.

Cuando $0 < r \leq 1/2$ entonces

$$\|A\|_{\infty} = r + (1 - 2r) + r = 1$$

y cuando $r > 1/2$, $|1 - 2r| = 2r - 1$ entonces

$$\|A\|_{\infty} = r + 2r - 1 + r = 4r - 1 > 1.$$

Así concluimos que el esquema es estable para $0 < r \leq 1/2$ e inestable para $r > 1/2$.

Otra alternativa es usar el hecho de que A es real y simétrica, entonces se tiene $\|A\|_2 = \rho(A) = \max |\lambda_j|$ donde λ_j son los autovalores de A . Si $A = I + rS$ donde

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \text{ y } S = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.148)$$

son matrices de orden $(N-1) \times (N-1)$. Entonces S tiene autovalores

$$\lambda_j = -4 \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right), \quad j = 1, \dots, N-1$$

lo cual puede ser verificado directamente. Así los autovalores de A son

$$\lambda_j = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right), \quad j = 1, \dots, N-1$$

y el sistema es estable cuando

$$\|A\|_2 = \max_j |1 - 4r \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right)| \leq 1$$

o

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2\left(\frac{j\pi}{2N}\right) \leq 1$$

El lado izquierdo de la ecuación da

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{(N-1)\pi}{2N}\right)}$$

y como

$$h \rightarrow 0, N \rightarrow \infty \text{ y } \sin^2\left(\frac{(N-1)\pi}{2N}\right) \rightarrow 1$$

Por lo tanto, la condición de estabilidad es $r \leq 1/2$. ■

Existe un problema obvio en aplicar el análisis matricial ya que en general los autovalores de la matriz A no están disponibles en ningún formato dado. Esto puede ser posible dando cotas para los autovalores, o los autovalores necesitarán ser encontrados numéricamente. Una alternativa es usar el **análisis de estabilidad de Fourier**.

6.2. Estabilidad de problemas de valor inicial

Una interpretación estabilidad de un esquema de diferencias es que pequeños errores en la condición inicial causan pequeños errores en la solución. Como vemos, la definición no permite el crecimiento de errores, pero pone límites al crecimiento exponencial. También la definición de estabilidad de un esquema de diferencias es similar a la definición de problemas bien puestos de ecuaciones diferenciales.

Definimos estabilidad para un esquema de diferencias de dos niveles

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n \quad n \geq 0, \quad (1.149)$$

el cual será un esquema de diferencias para resolver un problema de valor inicial sobre \mathbb{R} , lo cual incluye una ecuación diferencial parcial lineal homogénea.

6.3 Definición (Problema bien puesto).-

Un *problema de valor inicial* (**PVI**) se dice que es bien puesto en la norma $\|\cdot\|$ si y solamente si existe solución, es única y depende continuamente de los datos iniciales, es decir, existe una constante C y α tal que

$$\|u(x, t)\| \leq C e^{\alpha t} \|u_0(x)\|. \quad (1.150)$$

□

6.4 Definición.-

El esquema de diferencias finitas (1.149) es estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$ si existen constantes positivas Δx_0 y Δt_0 , y constantes no negativas K y β tal que

$$\|\mathbf{v}^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{v}^0\|, \quad (1.151)$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$. □

Si el esquema fuera de paso múltiple, la definición anterior podría modificarse en el sentido de que existe un entero J y constantes K, β tal que

$$\|\mathbf{v}^n\| \leq K e^{\beta t} \sum_{i=0}^J \|\mathbf{v}^i\|. \quad (1.152)$$

Note que como las definiciones de convergencia y consistencia, la definición de estabilidad está dada en términos de una norma. Como fue el caso de convergencia y consistencia, esta norma puede diferir de acuerdo a la situación. Note también que la definición de estabilidad no permite el crecimiento de la solución. Debemos notar que la solución puede crecer con el tiempo, pero no con el número de pasos del tiempo.

La definición (6.4) es una de las mas fuertes definiciones de estabilidad. Algo común en la definición es requerir que la condición (1.151) sea posible solo para $(n+1)\Delta t \leq T$ para cualquier T (donde K y β dependen solo de T).

6.2.1 Proposición.-

El esquema de diferencias (1.149) es estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$ si y sólo si existen constantes positivas Δx_0 y Δt_0 y constantes no negativas K y β tal que

$$\|Q^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \quad (1.153)$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$.

Prueba. Puesto que

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n = Q(Q\mathbf{v}^{n-1}) = Q^2\mathbf{v}^{n-1} = \dots = Q^{n+1}\mathbf{v}^0 \quad (1.154)$$

la expresión (1.151) puede ser escrita como

$$\|\mathbf{v}^{n+1}\| = \|Q^{n+1}\mathbf{v}^0\| \leq K e^{\beta t} \|\mathbf{v}^0\|, \quad (1.155)$$

o

$$\frac{\|Q^{n+1}\mathbf{v}^0\|}{\|\mathbf{v}^0\|} \leq K e^{\beta t} \quad (1.156)$$

Entonces tomando el supremo en ambos lados de la desigualdad sobre todos los vectores diferentes de cero, \mathbf{v}^0 , obtenemos

$$\|Q^{n+1}\| \leq K e^{\beta t} \quad (1.157)$$

Del hecho de que

$$\|Q^{n+1}\mathbf{v}^0\| \leq \|Q^{n+1}\| \|\mathbf{v}^0\| \quad (1.158)$$

y de la desigualdad (1.153) se tiene (1.151) (estabilidad). ■

Probar que el esquema de diferencias finitas

$$v_j^{n+1} = (1 - 2r)v_j^n + r(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) \quad (1.159)$$

es estable con respecto a la norma del supremo.

Note que si $r \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} |v_j^{n+1}| &\leq (1 - 2r)|v_j^n| + r|v_{j+1}^n| + r|v_{j-1}^n| \\ &\leq \|\mathbf{v}^n\|_\infty \end{aligned}$$

Si tomamos el supremo sobre ambos lados de la inecuación, con respecto a j , obtenemos

$$\|\mathbf{v}^{n+1}\|_\infty \leq \|\mathbf{v}^n\|_\infty \quad (1.160)$$

Por lo tanto, la desigualdad (1.151) se satisface si $K = 1$ y $\beta = 0$. ■

Note que para la estabilidad del esquema (1.159) se ha requerido que $r \leq 1/2$. En este caso decimos que el esquema es condicionalmente estable.

6.3. Estabilidad de problemas de valor inicial-contorno

Al igual como se ha trabajado anteriormente asumimos que tenemos una sucesión de particiones de nuestro intervalo $[0, 1]$ descrito por la sucesión de incrementos, $\{\Delta x_j\}$, y una sucesión de espacios $\{X_j\}$ con normas $\|\cdot\|_j$. Entonces decimos que el esquema de diferencias para el problema de valor inicial-frontera es estable si este satisface la desigualdad (1.151) con las normas $\|\cdot\|_j$.

Para ilustrar la definición, incluimos el siguiente ejemplo

6.3.1 Ejemplo.-

Considere el problema de valor inicial-frontera

$$u_t = \alpha u_{xx}, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0 \quad (1.161)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1] \quad (1.162)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (1.163)$$

con el esquema de diferencias

$$v_j^{n+1} = v_j^n + r\delta^2 v_j^n, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad (1.164)$$

$$v_0^{n+1} = v_M^{n+1} = 0, \quad n = 0, \dots \quad (1.165)$$

$$v_j^n = f(j\Delta x), \quad j = 0, \dots, M \quad (1.166)$$

Probar que si $r \leq 1/2$, el esquema de diferencias (1.164)-(1.166) es estable.

Prueba. Tomemos cualquier sucesión de particiones del intervalo $[0, 1]$ definido por una sucesión de incrementos $\{\Delta x_j\}$ y los espacios asociados, $\{X_j\}$, y normas, $\|\cdot\|_j$. Específicamente, elegimos los espacios X_j de dimensión $(M_j - 1)$ donde $M_j \Delta x_j = 1$ y $\|\cdot\|_j$ denota la norma del supremo sobre X_j

Fijamos el valor $r \leq 1/2$,

$$\begin{aligned} |v_j^{n+1}| &\leq (1-2r)|v_j^n| + r|v_{j+1}^n| + r|v_{j-1}^n| \\ &\leq (1-2r)\|\mathbf{v}^n\|_j + r\|\mathbf{v}^n\|_j + r\|\mathbf{v}^n\|_j \\ &= \|\mathbf{v}^n\|_j \end{aligned}$$

Si tomando el máximo sobre j en ambos lados, obtenemos

$$\|\mathbf{v}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{v}^n\|_j$$

Aplicando repetidamente la última desigualdad, llegamos a obtener

$$\|\mathbf{v}^{n+1}\|_j \leq \|\mathbf{v}^0\|_j$$

Así que el esquema es estable usando $K = 1$ y $\beta = 0$ ■

1.7. El teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer

Ahora que hemos discutido convergencia, consistencia y estabilidad, es tiempo de ver cómo ellos se relacionan. Como indicamos previamente, ellos están relacionados vía el teorema de Lax-Richtmyer.

Este teorema es importante porque nos da una forma simple de verificar si un esquema es convergente, ya que si intentamos verificar la convergencia directamente por la definición no siempre es posible, sin embargo verificar consistencia y estabilidad pueden ser mucho más fácil ya que involucra generalmente cálculos solamente algebraicos.

Teorema 3 Teorema de la equivalencia de Lax-Richtmyer

Un esquema de diferencias finitas de dos niveles consistente con la ecuación diferencial parcial para la cual el problema de valor inicial es bien puesto es convergente si y sólo si es estable.

Así que vemos que si tenemos un esquema consistente, entonces convergencia es sinónimo de estabilidad.

En lugar de intentar demostrar este teorema, demostraremos una versión ligeramente más fuerte que la mitad del teorema anterior.

Teorema 4 Teorema de Lax

Sea un esquema de diferencias de dos niveles

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n + \Delta t \mathbf{G}^n \quad (1.167)$$

de orden precisión (p, q) en la norma $\|\cdot\|$ para un problema de valor inicial lineal bien puesto y estable con respecto a la norma $\|\cdot\|$, entonces el esquema es convergente de orden de precisión (p, q) con respecto a la norma $\|\cdot\|$.

Prueba Sea $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$ la solución exacta del problema de valor inicial. Entonces puesto el esquema es de orden de precisión (p, q) , tenemos

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n + \Delta t \mathbf{G}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \quad (1.168)$$

con $\|\boldsymbol{\tau}^n\| = \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)$. Definimos el vector \mathbf{w} como la diferencia entre $\mathbf{u} - \mathbf{v}$. Entonces \mathbf{w} satisface

$$\mathbf{w}^{n+1} = Q\mathbf{w}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \quad (1.169)$$

Aplicamos la ecuación (1.169) en forma iterativa

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^{n+1} &= Q\mathbf{w}^n + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\ &= Q(Q\mathbf{w}^{n-1} + \Delta t \boldsymbol{\tau}^{n-1}) + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\ &= Q^2\mathbf{w}^{n-1} + \Delta t Q\boldsymbol{\tau}^{n-1} + \Delta t \boldsymbol{\tau}^n \\ &\dots \\ &= Q^{n+1}\mathbf{w}^0 + \Delta t \sum_{j=0}^n Q^j \boldsymbol{\tau}^{n-j} \end{aligned}$$

Puesto que $\mathbf{w}^0 = 0$, tenemos

$$\mathbf{w}^{n+1} = \Delta t \sum_{j=0}^n Q^j \boldsymbol{\tau}^{n-j} \quad (1.170)$$

El hecho de que el esquema sea estable implica que para cualquier j ,

$$\|Q^j\| \leq K e^{\beta_j t} \quad (1.171)$$

Tomando la norma en ambos lados de la ecuación (1.170) y usando (1.171) se llega a

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{w}^{n+1}\| &\leq \Delta t \sum_{j=0}^n \|Q^j\| \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq \Delta t K \sum_{j=0}^n e^{\beta_j \Delta t} \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq \Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} \sum_{j=0}^n \|\tau^{n-j}\| \\
 &\leq (n+1) \Delta t K e^{\beta(n+1)\Delta t} C_1(t) (\mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)) \quad (1.172)
 \end{aligned}$$

donde $C_1(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} C(s)$, donde $s = (n-j)\Delta t$, es la constante que está asociada a la expresión "big \mathcal{O} " para $\|\tau^{n-j}\|$. Elegimos t tal que $(n+1)\Delta t \rightarrow t$ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (o cuando $n \rightarrow \infty$). Así, como $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, en la expresión (1.172) se tiene

$$(n+1) \Delta t K e^{\beta t} C_1(t) (\mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)) \rightarrow t K e^{\beta t} C_1(t)(0) = 0 \quad (1.173)$$

Es fácil ver que la última expresión es equivalente a $\|\mathbf{v}^{n+1} - \mathbf{u}^{n+1}\| \rightarrow 0$.

Para ver la convergencia de orden (p, q) , observe que la expresión (1.172) puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{w}^{n+1}\| &\leq K(t) (\mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)) \\
 &= \mathcal{O}(\Delta x^p) + \mathcal{O}(\Delta t^q)
 \end{aligned}$$

■

Note que el término \mathbf{G}^n que aparece en las expresiones (1.167) y (1.168) son aproximaciones del término fuente. Así, cuando sustraemos para formar una ecuación para \mathbf{w} , ellos se sustraen. Cualquier error del truncamiento debido a como \mathbf{G}^n se aproxima el término de la fuente está contenido en el término τ

Como es costumbre, después de tratar los problemas de valor inicial, volvemos a tratar los problemas de valor inicial-frontera. Empezamos asumiendo que tenemos las mismas hipótesis que teníamos para las definiciones de convergencia, consistencia y estabilidad para problemas de valor inicial-frontera. Es fácil ver entonces que para una versión del teorema de Lax para un problema de valor inicial-frontera se agrega la subscripción j a cada norma $\|\cdot\|_j$. Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema.

Teorema 5 Teorema de Lax-Richtmyer

Si un esquema de dos niveles es de orden de precisión (p, q) en la sucesión de normas $\|\cdot\|_j$ para un problema de valor inicial-frontera bien puesto lineal y estable con respecto a la sucesión de normas $\|\cdot\|_j$, entonces el esquema es convergente de orden (p, q) con respecto a la sucesión de normas $\|\cdot\|_j$.

Antes de demostrar la versión completa del teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer daremos algunas precisiones:

1. Para problemas lineales tales como los que estamos estudiando, la condición de continuidad que satisfacen las soluciones de la ecuación diferencial para la norma L_2 , se puede expresar como

$$\|u(\cdot, t)\| \leq C_t \|u(\cdot, 0)\| \quad (1.174)$$

donde C_t es una constante independiente de la solución.

2. Una ecuación de primer orden con derivada en el tiempo puede escribirse en la forma

$$\hat{u}_t(w, t) = q(w) \hat{u}(w, t) \quad (1.175)$$

luego de aplicar la transformada de Fourier. Entonces el problema de valor inicial para la ecuación tiene la solución

$$\hat{u}_t(w, t) = e^{q(w)t} \hat{u}_0(w) \quad (1.176)$$

Teorema 6

Una condición necesaria y suficiente para que la ecuación (1.176) verifique la aproximación básica (1.175) es que exista una constante \bar{q} tal que

$$\text{Real } q(w) \leq \bar{q}$$

para todo $w \in \mathbb{R}$

Prueba. Ver [16] pág. 171

■

Suponemos que $\bar{q} = 0$ en (7) y que se utiliza la condición de estabilidad $|g(\theta)| \leq 1$. Esto es, suponemos que

$$|e^{tq(\xi)}| \leq 1 \quad y \quad |g(h\xi)| \leq 1 \quad (1.177)$$

Teorema 7 TEL

Un esquema de diferencias finitas consistente con una ecuación diferencial para la cual el problema de valor inicial es bien puesto, es convergente si y sólo si es estable.

Prueba.

Probaremos que la estabilidad implica la convergencia del esquema.

Se hace una suposición en (1.177). Asumimos que existe una constante C_T tal que

$$|e^{tq(\xi)}| \leq C_T \quad y \quad |g(h\xi)| \leq C_T \quad (1.178)$$

para $0 \leq t \leq T$ y $0 \leq nk \leq T$.

Asumimos que la condición inicial para el esquema es Tu_0 . Entonces tenemos

$$\|u_0 - Sv^0\|^2 = \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi, \quad (1.179)$$

la cual converge a cero cuando $h \rightarrow 0$ (Por la integral de Lebesgue).

Usando la consistencia se obtiene

$$\frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi)}{k} = \mathcal{O}(1), \quad (1.180)$$

en h y k , es decir $\xi \rightarrow 0$ cuando $h, k \rightarrow 0$.

Se consideran en L_2 la norma de $u(., t_n) - Sv^n$

$$\|u(., t_n) - Sv^n\|. \quad (1.181)$$

Luego por la relación de Parseval se tiene

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t_n) - Sv^n(x)|^2 dx &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &+ \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n} \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \end{aligned} \quad (1.182)$$

Se considera que el lado derecho de (1.182) como una integral sobre \mathbb{R} , con la particularidad que el integrando está dado en dos partes discretas. Es decir, el integrando es la función

$$\phi_h(\xi) = \begin{cases} |e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n|^2 & , \quad |\xi| \leq \frac{\pi}{h} \\ |e^{q(\xi)t_n} \cdot \widehat{u}_0(\xi)|^2 & , \quad |\xi| > \frac{\pi}{h} \end{cases}$$

Además para cada ξ cuando h es suficiente pequeña se tiene $|\xi| < \pi h^{-1}$, el integrando está dado como en la primera parte. La expresión $e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n$ satisface

$$|e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n| \leq n C_T |e^{q(\xi)k} - g(h\xi)| \quad (1.183)$$

Por (1.180) se tiene la aproximación

$$|e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n| \leq n k C_T \mathcal{O}(1) \leq \mathcal{O}(1) \quad (1.184)$$

Se concluye que el lado derecho de (1.182) converge a cero para cada valor de ξ cuando $h, k \rightarrow 0$. Así se tiene que el conjunto de funciones ϕ_h que están en $L^1(\mathbb{R})$ tienden a cero para cada punto cuando $h, k \rightarrow 0$.

Antes de concluir que las normas de las funciones convergen a cero se necesita lo siguiente

$$|e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 < (2C_T)^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 \quad (1.185)$$

Esto demuestra que las funciones ϕ_h son uniformemente acotadas por una función en $L^1(\mathbb{R})$, es decir, $4C_T^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2$. Por el teorema de la convergencia dominante de Lebesgue se concluye que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_h(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi, t_n) - \widehat{S}v^n|^2 d\xi \quad (1.186)$$

converge a cero cuando $h, k \rightarrow 0$, así el esquema es convergente.

Ahora brevemente considerar el caso donde $v^0 \neq Tu^0$. Primero se define la función discreta w^n que es la solución del esquema de diferencias finitas con la condición inicial Tu^0 . Se tiene entonces

$$\|u(., t_n) - Sv^n\| \leq \|u(., t_n) - Sw^n\| + \|Sw^n - Sv^n\| \quad (1.187)$$

Se tiene $\|u(., t_n) - Sw^n\| \rightarrow 0$, y por el resultado previo se tiene por la definición de S y por la estabilidad que

$$\begin{aligned} \|Sw^n - Sv^n\| &= \|S(w^n - v^n)\| = \|w^n - v^n\|_h \\ &\leq C_T \|w^0 - v^0\|_h \\ &= C_T \|Tu^0 - v^0\|_h \\ &\leq C_T \|u^0 - Sv^0\|, \end{aligned}$$

la cual es convergente a cero. Esto concluye la primera parte de la prueba, mostrando que un esquema estable es convergente.

Para probar que el esquema es estable, lo haremos suponiendo que el esquema no es convergente, es decir, no puede existir esquemas que sean inestables que sean convergentes.

En efecto, se construye una función $u_0(x)$ tal que el esquema con condición inicial Tu_0 no converge a la solución de la ecuación diferencial. La función $u_0(x)$ es construida como la suma de las funciones $w_M(c)$ determinada como sigue.

Si el esquema es inestable, se tiene para un entero positivo M , existen valores ξ_M , h_M, k_M tal que

$$|g(h_M \xi_M, h_M, k_M)| \geq 1 + Mk_M, \quad (1.188)$$

y $|h_M \xi_M| \leq \pi$. Puesto que $g(h\xi, k, h)$ es una función continua, existe un número positivo η_M tal que

$$|g(h_M \xi_M, h_M, k_M)| \geq 1 + \frac{1}{2}Mk_M \quad (1.189)$$

para $|\xi - \xi_M| \leq \eta_M$, además podemos elegir η_M tal que satisface $\eta_M \leq M^{-2}$ y elegir $h_M < h_{M-1}$ y $k_M < k_{M-1}$. Se necesita con relación a la consistencia del esquema el siguiente lema que lo enunciaremos.

Lema 7.1 Si un esquema de diferencias finitas es consistente, entonces los intervalos $I_M = [\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$ se pueden elegir tal que sean disjuntos.

Se define los números $\alpha_M > 0$ por $\alpha_M^2 \eta_M = M^{-2}$ y

$$\widehat{w}_M(\xi) = \begin{cases} \alpha_M & , \quad |\xi - \xi_M| < \eta_M \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar} \end{cases}$$

Se define la condición inicial como la suma de funciones w_M . Sea $u_0(x) = \sum_{M=1}^{\infty} w_M(x)$, se demostrará que u_0 está en $L^2(\mathbb{R})$. Como los intervalos I_M son disjuntos se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u_0(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= \sum_{M=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{w}_M(\xi)|^2 d\xi \\ &= 2 \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M^2 \eta_M \\ &= 2 \sum_{M=1}^{\infty} M^{-2} \\ &= \frac{\pi^2}{3}, \end{aligned}$$

lo cual muestra que u_0 esta en $L^2(\mathbb{R})$.

Se demostrará ahora que la solución del esquema aplicado a Tu_0 no converge. Sea v_m^n la solución del esquema como condición inicial. Dado un tiempo T , elegimos el nivel n , y un valor M tal que

$$\frac{T}{2} \leq nk_M \leq T, \quad y \quad \frac{C_T - 1}{M} \leq \frac{T}{8} \quad (1.190)$$

donde C_T es la constante inicial acotada por $e^{q(\xi)t}$ en (1.178). Se tiene

$$\|Sv^n - u(., t_n)\|^2 \geq \|v^n - Tu(., t_n)\|_h^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |g(h\xi)^n - e^{q(\xi)hk}|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi$$

Para $h = h_M$ y $\xi \in I_M$, tenemos la estimativa

$$|g(h\xi) - e^{q(\xi)kn}| \geq |g(h\xi)|^n - C_T \geq (1 + \frac{1}{2}Mk_M)^n - C_T \quad (1.191)$$

Así,

$$\begin{aligned} \|Sv^n - u(., t_n)\|^2 &\geq \int_{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M} |g(h\xi)^n - e^{q(\xi)nk}|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq [(1 + \frac{1}{2}Mk_M)^n - C_T]^2 \alpha_M^2 2\eta_M \\ &= 2 \left[\frac{1 + \frac{1}{2}Mk_M)^n - C_T}{M} \right]^2 \end{aligned}$$

Se tiene por (1.190),

$$\|Sv^n - u(., t_n)\|^2 \geq 2 \left(\frac{1}{2}\eta k_M - \frac{C_T - 1}{M} \right)^2 \geq \frac{T^2}{32} \rightarrow 0$$

Así Sv^n no converge a $u(., t_n)$, por lo tanto el esquema no es convergente.

Esto completa la prueba del teorema de equivalencia de Lax. ■

1.8. Análisis de estabilidad de los esquemas de diferencias finitas

En esta sección presentamos y desarrollamos la importante herramienta del análisis de Fourier, con el cual analizamos los esquemas de diferencias finitas y sus soluciones. El análisis de Fourier es una herramienta usada para estudiar importantes propiedades de los esquemas de diferencias finitas y sus soluciones. Usamos el análisis de Fourier desde el principio para estudiar los esquemas de diferencias finitas y las ecuaciones diferenciales parciales.

8.1. Análisis de estabilidad para problemas de valor inicial

Cuando resolvemos un problema de valor inicial sobre la \mathbb{R} , es común usar la transformada de Fourier. Por ejemplo, considerar el problema

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (1.192)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.193)$$

Si definimos la transformada de Fourier de u por

$$\hat{u}(w, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x, t) dx, \quad (1.194)$$

y tomar la transformada de Fourier a la ecuación diferencial parcial (1.192), obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{u}_t(w, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u_t(x, t) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u_{xx}(x, t) dx \\ &= -w^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x, t) dx \\ &= -w^2 \hat{u}(w, t) \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que la transformada de Fourier reduce la ecuación diferencial parcial a una ecuación diferencial ordinaria en el espacio transformado (el espacio de funciones transformadas). La técnica entonces es resolver la ecuación diferencial ordinaria en el espacio transformado y retornar luego a nuestro espacio solución. El método por el cual retornamos a nuestro espacio solución es usar la transformada de Fourier inversa, la cual es dada por

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx} \hat{u}(w, t) dw \quad (1.195)$$

Suponemos que tenemos el vector en \mathbb{Z}_2 , $\mathbf{v} = (\dots, v_{-1}, v_0, v_1, \dots)^T$ y definamos la transformada de Fourier discreta de \mathbf{v} como sigue:

8.1 Definición.-

La transformada de Fourier discreta de $\mathbf{v} \in l_2$ es la función $\hat{\mathbf{v}} \in L_2([-\pi, \pi])$ definida por

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij\xi} v_j$$

para $\xi \in [-\pi, \pi]$.

$$L_2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{-\pi}^{\pi} |f(\xi)|^2 d\xi < \infty\}$$

8.2 Definición.-

Si $\mathbf{v} \in l_2$, y $\hat{\mathbf{v}}$ es la transformada de Fourier discreta de \mathbf{v} , entonces

$$v_j = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ij\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \quad (1.196)$$

Si el espaciado entre los puntos malla es h , podemos cambiar variables y definir la transformada por

$$\hat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-imh\xi} v_m h$$

$$\xi \in \left[-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right].$$

La transformada discreta inversa de Fourier está dada por

$$v_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{+\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \hat{v}(\xi) d\xi$$

8.2. La transformada de Fourier

Si f es una función periódica de periodo $T = 2L$, es natural preguntarnos qué sucede si $L \rightarrow \infty$. Esto conduce a que la serie de Fourier se transforma en la integral de Fourier.

Transformada de Fourier de una función: Consideremos la aplicación integral

$$T(f(x)) = \int_{\Omega} K(x, t) f(t) dt \quad (1.197)$$

llamada *transformación integral* donde $K(x, t)$ es el núcleo.

La Integral de Fourier: Sea f una función periódica de periodo $T = 2L$ definida en $[-L, L]$, entonces (f se asume uniformemente convergente)

$$f(x) \leftarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x \right)$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier. Entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi}{L} t \cdot \cos \frac{n\pi}{L} x dt \right) \\ &+ \int_{-L}^L f(t) \sin \frac{n\pi}{L} t \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x dt \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos \left(\frac{n\pi}{L} (t-x) \right) dt \end{aligned}$$

Ahora como

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt \leq \frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)| dt$$

y $L \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |f(t)| dt \rightarrow 0$$

Así que

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right) dt \quad (1.198)$$

Si hacemos $\alpha = \frac{n\pi}{L}$ y $\Delta\alpha = \frac{\pi}{L}$ y luego lo reemplazamos en (1.198) para obtener

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^L f(t) \cos(\alpha_n(t-x)) dt d\alpha$$

Entonces la integral de Fourier de f es

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\alpha_n(t-x)) dt d\alpha \quad (1.199)$$

Si hacemos

$$\cos \alpha(t-x) = \frac{e^{i\alpha(t-x)} + e^{-i\alpha(t-x)}}{2} \quad (1.200)$$

reemplazamos (1.200) en (1.199)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\alpha(t-x)} dt d\alpha + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha(t-x)} dt d\alpha \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} e^{i\alpha x} dt d\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt}_{F(\alpha)} e^{i\alpha x} d\alpha \end{aligned}$$

Si

$$F(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt \quad (1.201)$$

entonces

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha \quad (1.202)$$

Aquí la ecuación (2.43) es la *Transformada de Fourier* de f y (2.44) es la *Transformada Inversa* de Fourier de f .

Notación:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\alpha) &= \mathcal{F}[f(x)] \\ f(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(\alpha)]\end{aligned}$$

8.2.1 Ejemplo.-

Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad |x| < a \\ 0 & , \quad |x| > a \end{cases}$$

entonces la Transformada de Fourier esta dada por

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-i\alpha u} du = \int_{-a}^{+a} (1) e^{-i\alpha u} du = 2 \frac{\text{sen } \alpha a}{\alpha}, \quad \alpha \neq 0$$

Para $\alpha = 0$ se tiene

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} du = \int_{-a}^{+a} du = 2a$$

Así que

$$F(\alpha) = \begin{cases} 2 \frac{\text{sen } \alpha a}{\alpha} & , \quad \alpha \neq 0 \\ 2a & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

8.3. Análisis de Fourier

La herramienta que usaremos más extensamente en nuestro estudio de estabilidad y problemas bien puestos es el análisis de Fourier.

Usaremos el análisis de Fourier sobre los reales \mathbb{R} o sobre una malla de enteros, \mathbb{Z} , o $h\mathbb{Z}$, el cual es definido por $h\mathbb{Z} = \{hm : m \in \mathbb{Z}\}$.

La transformada inversa de Fourier muestra que u puede ser recuperada de \hat{u} . La transformada inversa de Fourier es una fórmula que expresa la función $u(x)$ como una superposición de ondas, dadas por e^{iwx} , con diferentes amplitudes $\hat{u}(w)$. Si por ejemplo, la variable x representa el tiempo, entonces, la variable real w representa la frecuencia y la función transformada \hat{u} , esta definida en el espacio de frecuencias. Por otro lado si x representa una variable espacial, entonces, la variable w representa el número de onda, en este caso la función transformada \hat{u} esta definida en el espacio de número de onda.

En la práctica se define la transformada de Fourier para una función cuadrado integrable

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx < \infty \quad (1.203)$$

En estas condiciones la transformada de Fourier existe y es única.

En el siguiente ejemplo vemos la utilidad práctica de la transformada de Fourier en algunas situaciones

8.3.1 Ejemplo.-

Tomar la función discreta v_j dada por

$$v_j = \begin{cases} 1 & , |x_j| \leq 1 \\ 1/2 & , |x_j| = 1 \\ 0 & , |x_j| \geq 1 \end{cases}$$

donde $h = \Delta x = M^{-1}$ para algún entero M .

Tomemos la transformada de Fourier a v_j

$$\begin{aligned} \hat{v}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-ij\xi h} v_j h \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ij\xi h} \left(\frac{1}{2}\right) h + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ij\xi h} \left(\frac{1}{2}\right) h + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-(M-1)}^{M-1} e^{-ij\xi h} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \cos \xi + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(M - \frac{1}{2})h\xi}{\text{sen}\frac{1}{2}h\xi} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \cos \xi + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(Mh\xi) \cos(\frac{1}{2}h\xi) - \cos(Mh\xi) \text{sen}(\frac{1}{2}h\xi)}{\text{sen}\frac{1}{2}h\xi} \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \cos \xi + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \text{sen}\xi \cot\left(\frac{1}{2}h\xi\right) - \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \cos \xi \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \text{sen}\xi \cot\left(\frac{1}{2}h\xi\right) \end{aligned}$$

La fórmula de Parseval asegura el cálculo de la siguiente integral

$$\begin{aligned}
 \|\widehat{v}\|_h^2 &= \frac{h^2}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin^2(\xi) \cot\left(\frac{1}{2}h\xi\right) d\xi \\
 &= \|u\|_h^2 \\
 &= h\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{j=-(M+1)}^{M+1} \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\right] \\
 &= h\left[\frac{1}{2} + M - 1 - (-M + 1) + 1\right] = h\left[\frac{1}{2} + 2M - 1\right] \\
 &= h\left[2M - \frac{1}{2}\right] \\
 &= 2 - \frac{1}{2}h
 \end{aligned}$$

8.3.2 Ejemplo.-

Sea $v_j = \frac{1}{j^2}$, luego la transformada será

$$\widehat{v}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j^2} e^{-ij\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{j^2} \frac{e^{-ij\xi} + e^{ij\xi}}{2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \cos(j\xi)$$

8.3.1 Proposición.-

La sucesión \mathbf{v}^n es estable en la norma $l_{2,\Delta x}$ si y solo si la sucesión $\widehat{\mathbf{v}}^n$ es estable en $L_2([-\pi, \pi])$

1.9. Estabilidad para problemas de valor inicial-frontera

Ahora discutiremos la estabilidad para problemas de valor inicial-frontera, estos problemas son acotados en cada variable espacial.

9.0.1 Proposición.-

Sea un esquema de diferencias para el problema de valor inicial-frontera. La condición de von Neumann para el esquema de diferencias considerado como un esquema de diferencias para un problema de valor inicial es una condición necesaria para la estabilidad.

Para ilustrar la aplicación del resultado anterior damos el siguiente ejemplo

9.0.1 Ejemplo.-

Considere el problema de valor inicial-frontera

$$u_t + au_x = 0, a < 0, x \in (0, 1), t > 0 \quad (1.204)$$

$$u(1, t) = 0, t > 0 \quad (1.205)$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in [0, 1] \quad (1.206)$$

Encontrar una condición necesaria para la estabilidad (y, por lo tanto, convergencia) del esquema de diferencias

$$v_j^{n+1} = (1 + C_r)v_j^n - C_r v_{j+1}^n, \quad j = 0, \dots, M-1 \quad (1.207)$$

$$v_M^{n+1} = 0 \quad (1.208)$$

$$v_j^0 = f(j\Delta x), \quad j = 0, \dots, M. \quad (1.209)$$

Solución: Observe que por la proposición (9.0.1), si consideramos la ecuación de diferencias (1.207) como un esquema de diferencias para un problema de valor inicial, la estabilidad de este esquema será necesario para la estabilidad del esquema (1.207)-(1.209).

Sabemos que el esquema de diferencias (1.207) es estable como un problema de valor inicial si y solo si $C_r = a\Delta t / \Delta x \geq -1$. Por lo tanto $-1 \leq C_r \leq 0$, una condición necesaria para la estabilidad del esquema de diferencias (1.207)-(1.208).

9.0.2 Proposición.-

Sea un esquema de diferencias finitas explícito

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n \quad (1.210)$$

para un problema de valor inicial-frontera. Decimos que el esquema es estable si y sólo si existen constantes positivas Δx_0 y Δt_0 y constantes no negativas K y β tal que

$$\|Q^{n+1}\| \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t}, \quad (1.211)$$

para $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$

9.1. Series de Fourier y estabilidad

Recordemos que un esquema de diferencias finitas de un solo paso puede escribirse en la forma

$$\mathbf{v}_j^{n+1} = Q\mathbf{v}_j^n$$

donde $Q = Q(S_+, S_-)$ y S_+ , S_- son los operadores de desplazamiento hacia adelante y hacia atrás respectivamente, $S_+ v_j^n = v_{j+1}^n$, $S_- v_j^n = v_{j-1}^n$.

Tomando la transformada de Fourier a $S_+ v_j$ tenemos

$$\begin{aligned}\widehat{S_+ v_j} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_{j+1} e^{-i j h \xi} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-i(j-1)h\xi} \\ &= e^{ih\xi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} v_j e^{-i j h \xi} \\ &= e^{ih\xi} \hat{v}.\end{aligned}$$

donde $v_{j+1} = v_j e^{ih\xi}$. De la misma forma obtenemos

$$\widehat{S_- v_j} = e^{-ih\xi} \hat{v}.$$

De aquí si $\mathbf{v}^{n+1} = Q(S_+, S_-) \mathbf{v}^n$ podemos tomar la transformada de Fourier

$$\hat{\mathbf{v}}^{n+1} = Q(e^{ih\xi}, e^{-ih\xi}) \hat{\mathbf{v}}^n.$$

Si denotamos por $\theta = h\xi$ entonces tenemos el término

$$g(\theta, k, h) = Q(e^{i\theta}, e^{-i\theta}) \quad (1.212)$$

llamado **factor de amplificación**.

Antes de seguir con el análisis de estabilidad, utilizaremos el operador $\mathcal{F} : l_2 \rightarrow L_2([-\pi, \pi])$ como la transformada de Fourier discreta

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{ij\xi} v_j$$

Si definimos los operadores

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_+ \mathbf{v} &= \{u_{j+1}\} \\ \mathbf{S}_- \mathbf{v} &= \{u_{j-1}\}\end{aligned}$$

Así podemos decir que

$$\mathcal{F}(S_{\pm} v) = e^{\pm i\xi} \mathcal{F}(v)$$

Muchas veces, en lugar de aproximar un problema de valor inicial-frontera tomando la transformada de Fourier discreta, la aproximación al problema se puede hacer tomando la expresión

$$v_j^n = g^n e^{ijk\pi\Delta x} \quad (1.213)$$

donde $0 \leq k \leq M$, $n = 0, \dots$ y $i^2 = -1$.

Dado un esquema diferencias finitas para la ecuación de difusión es posible llegar a determinar el factor de amplificación

$$g = 1 - 4rsen^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}, \quad j = 1, \dots, M \quad (1.214)$$

Entonces, obtenemos una condición necesaria para la estabilidad restringiendo r tal que se cumpla $|g| \leq 1$. (El término g^n no crecerá sin límites)

9.1.1 Nota.-

Debemos darnos cuenta que lo que se encontró para g es exactamente lo mismo que se obtiene para los autovalores de una matriz Q . Por lo tanto, para obtener una condición de estabilidad requiere que $|g| \leq 1$ que la misma condición que los autovalores de la matriz Q deben ser menores o iguales a uno.

Un hecho importante que hay que tener en cuenta en el análisis de von Neumann es que no toma en cuenta las condiciones de frontera. Esto significa que el esquema será estable si las condiciones de frontera no causan inestabilidad. Pero debemos ser muy claros acerca del hecho de que el criterio de estabilidad de von Neumann nos da solo condiciones necesarias para la estabilidad.

El método anterior es claramente correcto pero se usa a menudo incorrectamente. Además, el método dará resultados fuertes que son condiciones necesarias.

El factor de amplificación se dice que satisface la condición de estabilidad de von Neumann si existe una constante $C > 0$ tal que

$$|g(\theta, k, h)| \leq 1 + Ck \quad (1.215)$$

donde $k = \Delta t$ paso del tiempo.

La condición (1.215) puede ser escrita en el siguiente teorema.

Teorema 8

Un esquema de diferencias finitas de un paso es estable en la norma $l_{2,\Delta x}$ si y solo si satisface la condición de von Neumann.

Prueba.

Primero demostramos la condición suficiente. En efecto, si la condición de von Neumann es satisfecha entonces el esquema de diferencias finitas es estable.

Sea $T > 0$ suficientemente grande, y supongamos que existe $C > 0$ tal que para todo θ se tiene

$$|g(\theta, k, h)| \leq 1 + Ck, 0 < k \leq k_0, 0 < h \leq h_0.$$

por la definición de factor de amplificación se tiene

$$\hat{\mathbf{v}}^n = g \hat{\mathbf{v}}^{n-1} = g^n \hat{\mathbf{v}}^0$$

Luego usando la identidad de Parseval

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}^n\|_h^2 &= \|\hat{\mathbf{v}}^n\|_h^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{\mathbf{v}}^n(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |g|^{2n} |\hat{\mathbf{v}}^0(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq (1 + Ck)^{2n} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{\mathbf{v}}^0(\xi)|^2 d\xi = (1 + Ck)^{2n} \|\hat{\mathbf{v}}^0\|_h^2 \\ &= (1 + Ck)^{2n} \|\mathbf{v}^0\|_h^2 \end{aligned}$$

Como $nk \leq T$, entonces $n \leq T/k$, y del hecho que $1 + x \leq e^x$, $x > 0$, tenemos

$$(1 + Ck)^{2n} \leq (1 + Ck)^{2\frac{T}{k}} \leq e^{2CT}$$

Entonces usando los extremos de la desigualdad anterior obtenemos

$$\|\mathbf{v}^n\|_h^2 \leq (1 + Ck)^{2n} \|\mathbf{v}^0\|_h^2 \leq e^{2CT} \|\mathbf{v}^0\|_h^2$$

podemos decir que existe $C_T = e^{2CT} > 0$, así como para las constantes $h_0 > 0$, $k_0 > 0$ elegidas en la condición de von Neumann y se cumple

$$\|\mathbf{v}^n\|_h^2 \leq C_T \|\mathbf{v}^0\|_h^2,$$

para todo $0 < h \leq h_0$, $0 < k \leq k_0$, $nk \leq T$

Para condición necesaria utilizamos la contraposición, es decir si la condición de von Neumann no es satisfecha entonces el esquema de diferencias finitas no es estable

En efecto: Supongamos que para cada $C > 0$, existe $\theta_c \in [-\pi, \pi]$ tal que

$$|g(\theta_c, k, h)| > 1 + Ck, \quad , 0 < k \leq k_0, 0 < h \leq h_0$$

Por la continuidad de $g(\theta)$ existe un intervalo $[\theta_1, \theta_2]$ que contiene a θ_c y además

$$|g(\theta)| \geq 1 + Ck, \quad \text{para todo } \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Si fijamos una función $\hat{\mathbf{v}}^0$ en el espacio de longitud o frecuencias que sea nula en el exterior del intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, por ejemplo

$$\hat{\mathbf{v}}^0(\xi) = \begin{cases} 0, & \theta \notin [\theta_1, \theta_2] \\ \sqrt{\frac{h}{\theta_2 - \theta_1}}, & \theta \in [\theta_1, \theta_2] \end{cases} = \begin{cases} 0, & \theta \notin [\frac{\theta_1}{h}, \frac{\theta_2}{h}] \\ \sqrt{\frac{h}{\theta_2 - \theta_1}}, & \theta \in [\frac{\theta_1}{h}, \frac{\theta_2}{h}] \end{cases}$$

Observamos que $\|\hat{v}^0\| = 1$.

Entonces utilizando nuevamente la identidad de Parseval tenemos

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v}^n\|_h^2 &= \|\hat{\mathbf{v}}^n\|_h^2 = \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |\hat{v}^n(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} |g|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\
 &= \int_{-\frac{\theta_1}{h}}^{\frac{\theta_2}{h}} |g|^{2n} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi \\
 &\geq (1 + Ck)^{2n} \int_{-\frac{\theta_1}{h}}^{\frac{\theta_2}{h}} |\hat{v}^0(\xi)|^2 d\xi = (1 + Ck)^{2n}
 \end{aligned}$$

Si elegimos C para el cual existe $T > 0$ y k con $kn \sim T$ tal que se cumpla

$$2 + 2CT \geq e^{2CT} \sim (1 + kC)^{\frac{T}{k}}$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 \|\mathbf{v}^n\|_h^2 &\geq (1 + Ck)^{2n} = (1 + Ck)^{2\frac{T}{k}} \\
 &\geq \frac{1}{2} (1 + Ck)^{2\frac{T}{k}} \sim \frac{1}{2} e^{2CT} \\
 &= \frac{1}{2} e^{2CT} \|\mathbf{v}^0\|_h^2
 \end{aligned}$$

Por tanto, para cada $C_T = \frac{1}{2} e^{2CT}$ existe $T > 0$ tal que $1 + CT \geq C_T$ y se cumple

$$\|\mathbf{v}^n\|_h^2 \geq C_T \|\mathbf{v}^0\|_h^2$$

que es la no estabilidad del esquema. ■

9.1.2 Nota.-

Si $g(\theta, k, h) = g(\theta)$ entonces la condición de von Neumann puede escribirse en la forma

$$|g(\theta)| \leq 1. \quad (1.216)$$

9.1.1 Proposición.-

El esquema de diferencias finitas

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n$$

es estable con respecto a la norma $l_{2,\Delta x}$ si y sólo si existen constantes positivas Δt_0 y Δx_0 y constantes no negativas β y K tal que

$$|g(\theta)|^{n+1} \leq K e^{\beta(n+1)\Delta t}$$

para $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$ y todo $\theta \in [-\pi, \pi]$, donde g es el factor de amplificación del esquema (9.1.1).

Prueba. Thomas, J., pág. 108. ■

9.1.2 Proposición.-

El esquema de diferencias

$$\mathbf{v}^{n+1} = Q\mathbf{v}^n \quad (1.217)$$

es estable con respecto a la norma $l_{2,\Delta x}$ si y solo si existen constantes positivas Δt_0 , Δx_0 , y C tal que y todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

$$|g(\theta)| \leq 1 + C\Delta t \quad (1.218)$$

para $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$, $0 < \Delta x \leq \Delta x_0$

Prueba Note que cuando g satisface la desigualdad (1.218) se dice que g satisface la **condición de von Neumann**.

Es fácil ver que

$$|g(\theta)| \leq 1 + C\Delta t \leq e^{C\Delta t} \quad (1.219)$$

entonces

$$|g(\theta)|^{n+1} \leq e^{(n+1)C\Delta t}. \quad (1.220)$$

Por lo tanto, el esquema es estable por la proposición (9.1.2).

Para probar la convergencia, asumimos que la condición no se cumple, es decir, suponemos que para todo $C > 0$, existen constantes $\theta_C \in [-\pi, \pi]$, tal que

$$|g(\theta_C)| > 1 + C\Delta t.$$

Usando una sucesión $\{C_j\}$ tal que $C_j \rightarrow \infty$ cuando $j \rightarrow \infty$, encontramos una sucesión $\{\theta_j\}$ tal que

$$|g(\theta_j)|^{n+1} \rightarrow \infty, \quad j \rightarrow \infty$$

Por lo tanto, $|g(\theta)|^{n+1}$ no puede ser acotado. Esto contradice la proposición (9.1.2). ■

Por lo tanto, se ha demostrado que si el esquema de diferencias no satisface la condición de von Neumann, entonces este no puede ser estable. Así, si el esquema es estable, entonces este debe satisfacer la condición de von Neumann, lo cual se ha probado en la Proposición anterior.

Este teorema muestra que para determinar la estabilidad de una ecuación diferencial solamente necesitamos considerar el factor de amplificación $g(\theta, k, h)$.

9.1.1 Ejemplo.-

Probaremos que una condición suficiente para la estabilidad del esquema forward-time forward-space con la ecuación $u_t + au_x = 0$ es que $0 < C_r \leq 1$, $a < 0$.

En efecto, el esquema forward-time forward-space es posible escribirlo en la forma

$$v_j^{n+1} = \alpha v_j^n + \beta v_{j+1}^n \quad (1.221)$$

Demostraremos que este esquema es estable para $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha v_j^n + \beta v_{j+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |v_j^n|^2 + 2|\alpha||\beta| |v_{j+1}^n| |v_j^n| + |\beta|^2 |v_{j+1}^n|^2 \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |v_j^n|^2 + |\alpha||\beta| (|v_{j+1}^n|^2 + |v_j^n|^2) + |\beta|^2 |v_{j+1}^n|^2 \end{aligned}$$

usando el hecho que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} (|v_j^n|^2 + |v_{j+1}^n|^2) = 2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2$$

tenemos

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |v_j^n|^2 + |\alpha||\beta| (|v_j^n|^2 + |v_{j+1}^n|^2) + |\beta|^2 |v_{j+1}^n|^2 \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\alpha|^2 |v_j^n|^2 + 2|\alpha||\beta| |v_j^n|^2 + |\beta|^2 |v_j^n|^2 \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (|\alpha|^2 + 2|\alpha||\beta| + |\beta|^2) |v_j^n|^2 \\ &= (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \end{aligned}$$

sacando extremos tenemos

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 \leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \quad (1.222)$$

Por inducción sobre la ecuación (1.222)

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \\
 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n-1}|^2 \\
 &\leq \dots \leq (|\alpha| + |\beta|)^{2n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2
 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^{2n} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2 \\
 h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq (|\alpha| + |\beta|)^{2n} h \sum_{j=0}^0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2
 \end{aligned}$$

Si hacemos

$$\begin{aligned}
 C_T &= (|\alpha| + |\beta|)^{2n} \\
 \|bfv^{n+1}\|_h &\leq C_T (h \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2) \\
 \|\mathbf{v}^{n+1}\|_h &\leq C_T \|\mathbf{v}^0\|_h
 \end{aligned}$$

Así que el esquema es estable si $|C_T| \leq 1$, esto es, $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. En el caso particular del esquema de forward-time forward-space, tenemos que $\alpha = 1 + C_r$ y $\beta = -C_r$, así que

$$|\alpha| + |\beta| = |1 + C_r| + |-C_r| \leq 1$$

Entonces

$$|1 + C_r| + |C_r| \leq 1$$

Por lo tanto, para $a < 0$ se tiene $0 \leq C_r \leq 1$ ó $-1 \leq C_r \leq 0$. ■

Mostraremos que la condición $C_r \leq 1$ es necesaria para la estabilidad de muchos de los esquemas explícitos para la ecuación de convección (??).

9.1.2 Ejemplo.-

Aquí incluimos una alternativa mucho más fácil de analizar la estabilidad del esquema de diferencias finitas

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{1}{2}C_r(v_{j+1} - v_{j-1}) + r(v_{j+1} - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (1.223)$$

El factor de amplificación del esquema está dado por

$$g(\theta) = (1 - 2r) + 2r \cos \theta - iC_r \sin \theta \quad (1.224)$$

tal que

$$|g(\theta)|^2 = (1 - 4r \sin^2 \frac{\theta}{2})^2 + C_r^2 \sin^2 \theta \quad (1.225)$$

Si tomamos una constante r_0 tal que $r_0 \leq 1/2$, entonces (1.225) se puede escribir

$$\begin{aligned} |g(\theta)|^2 &= (1 - 4r_0 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2 + C_r^2 \sin^2 \theta \\ &= (1 - 4r_0 \sin^2 \frac{\theta}{2})^2 + a^2 \frac{r_0}{\alpha} \Delta t \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Puesto que $r_0 \leq 1/2$, $1 - 4r_0 \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1$ y $\sin^2 \theta \leq 1$, entonces la ecuación (1.226) implica que

$$|\rho(\theta)|^2 \leq 1 + C \Delta t, \quad C = a^2 \frac{r_0}{\alpha} \quad (1.226)$$

Por lo tanto, el esquema es estable. ■

Ahora presentamos un resultado que abarca todos los esquemas de un paso.

Teorema 9

Para un esquema explícito para la ecuación de convección tenemos el esquema de diferencias

$$v_j^{n+1} = \alpha v_{j-1}^n + \beta v_j^n + \gamma v_{j+1}^n$$

con $C_r = a \frac{k}{h}$ constante, una condición necesaria para la estabilidad es la condición de (CFL) Courant-Friedrichs-Lewy, $|C_r| \leq 1$.

Prueba. Hacemos la prueba para el caso escalar. Suponemos que $|C_r| = |a\lambda| > 1$; entonces en el punto $(x, t) = (0, 1)$ vemos que la solución de la ecuación diferencial $u(x, t) = u_0(x - at)$ depende de los valores de $u_0(x)$ en $x = +a$ y $x = -a$ (en realidad solamente de uno de ellos a ó $-a$). Pero el esquema de diferencias finitas tendrá v_0^n dependiendo únicamente de v_j^0 para $j \leq n$, por la forma del esquema con $h = \lambda^{-1}k$, tenemos $jh \leq \lambda^{-1}kn = \lambda^{-1}$, pues $kn = 1$. Es decir que v_0^n depende de x solamente para $|x| \leq \lambda^{-1} < |a|$.

Por tanto, v_0^n no converge a $u(0, 1)$ cuando $h \rightarrow 0$ con $h/k = 1$; por tanto $|C_r| \leq 1$. ■

De manera similar se puede probar que no existe esquemas consistentes explícitos para ecuaciones hiperbólicas que sean estables para todos los valores de r (con λ constante cuando $h, k \rightarrow 0$).

En este sentido presentamos el siguiente teorema; probado primeramente por Courant, Friedrichs y Lewy.

Teorema 10

No existe esquemas de diferencias finitas consistentes, incondicionalmente estables explícitos para sistemas hiperbólicos de ecuaciones diferenciales parciales.

9.1.3 Ejemplo.-

Mostraremos que el esquema implícito

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} = 0 \quad (1.227)$$

es estable para $a > 0$ y k/h arbitrario.

Prueba. En efecto, el esquema (1.227) es posible escribirlo en la forma

$$(1 + C_r)^2 v_j^{n+1} = v_j^n + C_r v_{j-1}^{n+1} \quad (1.228)$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} (1 + C_r) |v_j^{n+1}|^2 &= |v_j^n + C_r v_{j-1}^{n+1}|^2 \\ &\leq |v_j^n|^2 + 2C_r |v_j^n| |v_{j-1}^{n+1}| + C_r^2 |v_{j-1}^{n+1}|^2 \\ &\leq |v_j^n|^2 + C_r (|v_j^n|^2 + |v_{j-1}^{n+1}|^2) + C_r^2 |v_{j-1}^{n+1}|^2 \\ &= (1 + C_r) |v_j^n|^2 + (C_r + C_r^2) |v_{j-1}^{n+1}|^2 \end{aligned}$$

tomando la suma sobre todos los valores de j , obtenemos:

$$\begin{aligned} (1 + C_r)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq (1 + C_r) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 + \\ &\quad (C_r + C_r^2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_{j-1}^{n+1}|^2 \\ &= (1 + C_r) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 + C_r (1 + C_r) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \\ &= ((1 + C_r) + a\lambda(1 + C_r)) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \\ &= (1 + 2C_r + C_r^2) \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$(1 + C_r)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 \leq (1 + C_r)^2 \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2$$

de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n-1}|^2 \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n-2}|^2 \\ &\dots \\ &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2 \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^{n+1}|^2 &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} |v_j^0|^2 \\ \|\mathbf{v}^{n+1}\|_h &\leq \sum_{j=0}^n \|\mathbf{v}^j\|_h \end{aligned}$$

o lo que es lo mismo

$$h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_j^n|^2 \leq C_T h \sum_{j=0}^J \sum_{m=-\infty}^{\infty} |v_j^m|^2$$

para $J = 0$. Por lo tanto, el esquema es estable para todo valor de h/k cuando $a > 0$. ■

Siempre es posible elegir el número de Courant C_r arbitrariamente grande para que el esquema (1.227) sea estable como se demuestra teóricamente, pero es recomendable no tomar valores grandes para C_r . Más adelante mostraremos que existen ventajas de elegir C_r pequeño sobre todo por los errores de máquina.

1. Las soluciones de los esquemas de diferencias finitas muestran que la inestabilidad está relacionado con oscilaciones de alta frecuencia.
2. La precisión será menos buena cuando hay discontinuidades en las condiciones iniciales o en sus derivadas. Puede demostrarse analíticamente que cuando los valores en la frontera son constantes, el efecto de las discontinuidades en los valores iniciales y sus derivadas iniciales en la solución de una ecuación parabólica disminuye cuando t se incrementa.

3. Inestabilidad es el crecimiento rápido de altas frecuencia en la solución del esquema de diferencias finitas.
4. La inestabilidad es esencialmente un fenómeno de carácter local, esto es, las oscilaciones ocurren en los puntos donde la derivada de la solución es discontinua. Es claro que las oscilaciones causadas por la inestabilidad se propaga a otras regiones, que pueden hacer que la perturbación finalmente parezca global en la extensión.
5. El término de error es definido por

$$Error = \left(\frac{Valor\ Analítico - Valor\ Computacional}{Valor\ Analítico} \right) 100$$

Para estudiar el efecto del tamaño de paso sobre la precisión de la solución, podemos tomar un esquema implícito generando diferentes soluciones para diferentes tamaños de paso. Naturalmente, cuando el valor del paso del tiempo se incrementa, el total de puntos malla en el dominio computacional decrece y, como resultado, el tiempo computacional disminuye. Sin embargo, estas ventajas son acompañadas por un aumento de error.

Considerar que para todo el análisis de estabilidad se impone limitaciones sobre algunos esquemas de diferencias. En segundo lugar, la precisión de la solución y el tiempo computacional requerido para generar la solución juega un importante rol en la elección del tamaño de paso adecuado. Una vez que se ha obtenido la solución, esta deberá ser comparada con otras soluciones, analíticas o numéricas, y para datos experimentales si es posible. Cuando se gana experiencia en estos métodos y en su comportamiento, fácilmente se puede elegir el tamaño correcto de paso y la técnica numérica apropiada.

Seleccionar una técnica numérica depende del problema planteado y la naturaleza de las ecuaciones gobernantes del problema y además las condiciones iniciales y de frontera que son impuestas. Cada uno de los métodos descritos tienen sus propias ventajas y desventajas. Así cuando un problema es planteado, las ventajas y desventajas del método numérico disponible debe ser cuidadosamente pensado antes de seleccionar un algoritmo en particular.

Si hacemos un resumen sobre aplicaciones y limitaciones del método de estabilidad de von Neumann

1. El análisis de estabilidad de von Neumann puede ser aplicado solo a ecuaciones lineales.
2. La influencia de la condición de frontera sobre la estabilidad de la solución no es incluida.

3. Para una ecuación diferencial escalar la cual es aproximada por un esquema de diferencias finitas, el requerimiento matemático es impuesto sobre el factor de amplificación como sigue:
 - a) Si g es real, entonces $|g| \leq 1$
 - b) si g es compleja, entonces $\|g\|^2 \leq 1$, donde $\|g\|^2 = g \bar{g}$
4. Para una ecuación diferencial escalar la cual es aproximada por un esquema de diferencias de tres niveles, el factor de amplificación es una matriz. En este caso el requerimiento es impuesto sobre los autovalores de la matriz de amplificación G como sigue:
 - a) Si λ es un autovalor real, entonces $|\lambda| \leq 1$
 - b) Si λ es un autovalor complejo, entonces $|\lambda|^2 \leq 1$
5. El método de diferencias finitas puede ser fácilmente extendido a problemas bidimensionales.
6. El procedimiento puede ser usado para analizar la estabilidad de un sistema de ecuaciones diferenciales. El requerimiento es impuesto sobre los autovalores más grandes de la matriz de amplificación.
7. Los valores de estabilidad para problemas unidimensionales no estacionarios pueden, ser establecidos como sigue:
 - a) Para formulaciones explícitas: número de Courant $C_r \leq 1$, número de difusión $r \leq 0.5$ y número de celda de Reynolds $Re_c \leq \frac{2}{C_r}$
 - b) Para una formulación implícita, muchos esquemas son incondicionalmente estables.
8. En ocasiones el factor de amplificación es una expresión difícil de analizar, por ello se recurre a la experimentación numérica para facilitar el análisis.

9.2. Análisis de error en el método de diferencias finitas

En el método de diferencias finitas tenemos esquemas de primer orden de precisión. Un ejemplo de un esquema de primer orden de precisión para la ecuación modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

si utilizamos diferencias progresivas en el tiempo y diferencias regresivas en el espacio obtenemos

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Note que, en el proceso de aproximación, la serie de Taylor fue truncada en la segunda derivada, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{\Delta t}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots$$

$\mid \rightarrow \mathcal{O}(\Delta t)$

Para una formulación de segundo orden de precisión, el término del error de truncamiento está en la tercera derivada; por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} - \frac{2(\Delta t)^2}{3!} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \dots$$

$\mid \rightarrow \mathcal{O}(\Delta t)^2$

El error asociado con un esquema de primer orden de precisión es conocido como *error de disipación*. Estos errores tienden a decrecer el gradiente dentro del dominio solución. Los errores asociados con un esquema de precisión de segundo orden son conocidos como *errores de dispersión*. Los errores de disipación producen una disminución de la amplitud de la onda, mientras que el error de dispersión indica una oscilación en la solución.

Para determinar el término de error dominante de una ecuación de diferencias, el desarrollo de la serie de Taylor fue reemplazada por una ecuación en diferencias y, después de alguna manipulación algebraica, la así llamada ecuación modificada es obtenida. Para ilustrar el procedimiento consideremos dos ejemplos. Los ejemplos seleccionados representan un orden de precisión de primer y segundo. Estos ejemplos mostrarán el término de error dominante de estos esquemas y su relación con los errores de disipación y dispersión.

9.2.1 Ejemplo.-

Un esquema de diferencias de primer orden para la ecuación modelo

$$u_t + au_x = 0$$

es dado por el esquema Upwind

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

la cual es arreglada en forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = v_j^n - C_r(v_j^n - v_{j-1}^n)$$

Los términos v_j^{n+1} y v_{j-1}^n son expandidos en su serie de Taylor como sigue

$$v_j^{n+1} = v_j^n + (\Delta t) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (1.229)$$

$$v_{j-1}^n = v_j^n - (\Delta x) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (1.230)$$

Sustituyendo (1.229) y (1.230) en (1.229) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} = & -a \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{(\Delta t)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + a \frac{(\Delta x)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ & - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t)^3 + \mathcal{O}(\Delta x)^3] \end{aligned} \quad (1.231)$$

Analizamos la ecuación (1.231) y comparamos esta con la ecuación diferencial parcial original, las derivadas de orden superior en el tiempo deben ser reemplazadas por las derivadas espaciales. Esta sustitución requiere la determinación de $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ con un orden de

error $[\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2]$ y $\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}$ con un orden de error $[\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)]$ tal que el error de precisión de (1.231) no es alterado, es decir, el resto es de tercer orden.

Para determinar $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$, tomar la derivada de (1.231) con respecto a x para obtener

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} = & -a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ & - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial t^3} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + (\mathcal{O}(\Delta t)^3, \mathcal{O}(\Delta x)^3) \end{aligned} \quad (1.232)$$

Similarmente, la derivada con respecto a t de la ecuación (1.231) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & -a \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} - \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} \\ & - a \frac{\Delta x}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} + (\mathcal{O}(\Delta t)^3, \mathcal{O}(\Delta x)^3) \end{aligned} \quad (1.233)$$

multiplicando la ecuación (1.232) por $-a$ y sumando (1.233) obtenemos

$$\begin{aligned} -a \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = & a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - a^2 \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ & + a \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial t^3} + a^2 \frac{\Delta t}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \\ & - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - a \frac{\Delta x}{6} + (\mathcal{O}(\Delta t)^3, \mathcal{O}(\Delta x)^3) \end{aligned}$$

Simplificando

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\Delta t}{2} \left[a \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} \right] \\ &+ \frac{\Delta x}{2} \left[a \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} - a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \right] + (\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (1.234)$$

Esta ecuación requiere que determinemos $\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}$, $\frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2}$ y $\frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x}$, las cuales son de primer orden de precisión.

Para derivar estas ecuaciones tomamos la derivada de (1.231) con respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right) &= -a \frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} \\ &- \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^5 v}{\partial t^5} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^5 v}{\partial t^2 \partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t)^3, \mathcal{O}(\Delta x)^3] \end{aligned} \quad (1.235)$$

y la derivada con respecto a x de (1.234) es

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\Delta t}{2} \left[a \frac{\partial^4 v}{\partial x^2 \partial t^2} - \frac{\partial^4 v}{\partial x \partial t^3} \right] \\ &+ \frac{\Delta x}{2} \left[a \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} - a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right] + (\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2) \end{aligned} \quad (1.236)$$

multiplicando (1.236) por $-a$ y sumando a la ecuación (1.235), obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} &= -a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\Delta t}{2} \left[a \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} - \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} \right] \\ &+ \frac{\Delta t}{2} \left(a \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial x^2} - a^2 \frac{\partial^4 v}{\partial t \partial x^3} + a^3 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right) + (\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2) \end{aligned}$$

Puesto que estamos interesados en la relación de precisión de primer orden, podemos escribir

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)] \quad (1.237)$$

Similarmemente, por manipulaciones algebraicas podemos llegar a determinar que

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} = -a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + (\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)) \quad (1.238)$$

y

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^2 \partial x} = a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + (\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)) \quad (1.239)$$

Sustituyendo (1.237) y (1.239) en (1.234) obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\Delta t}{2} \left(a^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)] \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{2} \left(-a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)] \right) \\ &\quad + a \frac{\Delta x}{2} \left(-a \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + [\mathcal{O}(\Delta t), \mathcal{O}(\Delta x)] \right) \\ &\quad - a^2 \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + (\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2)\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (a^3 \Delta t - a^2 \Delta x) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2, \Delta t, \Delta x, (\Delta x)^2] \quad (1.240)$$

y

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}[\Delta t, \Delta x] \quad (1.241)$$

Sustituyendo (1.240) y (1.241) en (1.231) se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -a \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a^2}{2} \Delta t \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (a^3 \Delta t - a^2 \Delta x) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ &\quad + a^3 \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - a \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}[(\Delta t)^3, (\Delta x)(\Delta t)^2, (\Delta x)^2(\Delta t), (\Delta x)^3]\end{aligned}$$

Reescribiendo esta ecuación en términos del número de Courant C_r

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= -a \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{a}{2} h(1 - C_r) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a \frac{h^2}{6} (2C_r^2 - 3C_r + 1) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \\ &\quad + \mathcal{O}[(\Delta t)^3, (\Delta x)(\Delta t)^2, (\Delta x)^2(\Delta t), (\Delta x)^3]\end{aligned} \quad (1.242)$$

Esta ecuación es conocida como la **ecuación modificada** cuando la comparamos con la ecuación diferencial original dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

El error introducido en el proceso de aproximación es claramente indicado. Note que el término de error es de primer orden, el cual incluye la segunda derivada.

9.2.2 Ejemplo.-

Un **esquema de diferencias de segundo orden** para la ecuación modelo

$$u_t + au_x = 0$$

es dado por el esquema Leapfrog

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0$$

Esta ecuación puede ser puesta en forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - Cr(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \quad (1.243)$$

Sustituyendo en (1.243) los desarrollos de Taylor en el nodo (x_j, t_n) obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{(\Delta t)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} - a \frac{(\Delta x)^2}{6} \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4, (\Delta x)^4] \quad (1.244)$$

Haciendo manipulaciones algebraicas se llega a

$$\frac{\partial^3 v}{\partial t^3} = -a^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) \quad (1.245)$$

Sustituyendo en (1.244) y factorizando términos obtenemos

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -a \frac{\partial v}{\partial x} + a \frac{(\Delta x)^2}{6} \left[a^2 \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 - 1 \right] \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}[(\Delta t)^4, (\Delta x)^3(\Delta t), (\Delta x)^4] \quad (1.246)$$

Esta es la **ecuación modificada** de la ecuación modelo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.247)$$

Claramente se indica el término del error dominante. Note que su término de error incluye derivadas de tercer orden.

■

9.3. Viscosidad artificial

El término de error en el esquema (1.242) de primer orden de precisión es claramente indicado con el segundo término del lado derecho, empezando el término dominante del error. El coeficiente que lo denotamos por α_c

$$\alpha_c = a \frac{h}{2} (1 - Cr) \quad (1.248)$$

es conocido como **viscosidad artificial o numérica**. Este coeficiente no físico introducido por una aproximación particular a una ecuación diferencial.

Note que para $C_r = 1$, $\alpha_c = 0$, la solución es exacta. El efecto de la viscosidad artificial es disipar la solución; como un resultado, el gradiente en el dominio de evolución son reducidos.

Otro procedimiento para determinar el término de error dominante puede ser el siguiente. Considerar la ecuación (1.231) que reescrita se puede escribir como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2, (\Delta x)^2) \quad (1.249)$$

Para eliminar la derivada en el tiempo del lado derecho de la ecuación (1.249), la ecuación original será usada, es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.250)$$

Tomando la derivada en el tiempo, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= -a \frac{\partial}{\partial x} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (1.251)$$

Sustituyendo (1.251) en (1.250)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\Delta t}{2} + a \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}[\Delta t^2, \Delta x^2] \quad (1.252)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -a \frac{\partial u}{\partial x} + \left(a \frac{\Delta x}{2} - a^2 \frac{\Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}[\Delta t^2, \Delta x^2] \\ &= -a \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\Delta x}{2} \left(1 - a \frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}[\Delta t^2, \Delta x^2] \end{aligned}$$

o, en términos del número de Courant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\Delta x}{2} (1 - C_r) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}[\Delta t^2, \Delta x^2] \quad (1.253)$$

donde el segundo término del lado derecho representa el término de error y el coeficiente

$$a \frac{\Delta x}{2} (1 - C_r) \quad (1.254)$$

representa la viscosidad artificial.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DE DIFERENCIAS PARA ECUACIONES HIPERBÓLICAS

Las ecuaciones en derivadas parciales de primer orden se utilizan para describir una gran variedad de fenómenos físicos, por ejemplo

- La ecuación

$$\rho u_x + \rho_t = 0 \quad (2.1)$$

describe la conservación de masa en una dimensión de un gas que fluye a través de un tubo con velocidad u y densidad ρ

- El sistema de ecuaciones parciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial v}{\partial t} &= -Gv \\ \frac{\partial v}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} &= -Ri \end{aligned}$$

representa el voltaje y la corriente en una línea de transmisión, donde R es la resistencia, L la inductancia, G la capacidad y C la conductividad de fuga.

Un sistema general de n ecuaciones de primer en derivadas parciales con n incógnitas tiene la forma

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial y} = c_i \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

El sistema (2.2) es cuasilineal si a_{ij} , b_{ij} y c_i pueden depender de las variables x , y , u_1 , u_2, \dots, u_n y es lineal si cada a_{ij} , b_{ij} son independientes de u_1, u_2, \dots, u_n y además cada c_i depende de manera lineal de u_1, u_2, \dots, u_n . Por ejemplo, la ecuación (2.1) es cuasilineal y la ecuación (2.2) es lineal.

En términos de matrices, el sistema (2.2) se puede expresar como

$$Au_x + Bu_y = C \quad (2.3)$$

donde A y B son matrices de orden $n \times n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ y C son vectores columna de orden $n \times 1$.

Para clasificar el sistema de ecuaciones (2.3) en ecuaciones diferenciales de parciales de primer orden, las matrices A o B tienen que ser no singulares. Si $\det(B) \neq 0$ podemos definir el polinomio característico de grado n en términos de λ por

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda B) \quad (2.4)$$

Luego se puede decir que (2.3) es

1. **Elíptico** si $P_n(\lambda)$ no tiene raíces reales.
2. **Hiperbólico** si $P_n(\lambda)$ tiene raíces reales y distintas, o si $P_n(\lambda)$ tiene n raíces en donde por lo menos una se encuentra repetida y el problema generalizado de valor propio $(A^t - \lambda B^t)\mathbf{V} = 0$ proporciona n vectores propios linealmente independientes.
3. **Parabólico** si $P_n(\lambda)$ tiene n raíces reales en donde por lo menos una se encuentra repetida y el problema generalizado anterior de valor propio proporciona menos de n vectores propios linealmente independientes.

En el caso en que $P_n(\lambda)$ tiene tanto raíces reales como complejas, no se puede llevar a cabo una clasificación exhaustiva del sistema (2.3).

0.0.1 Ejemplo.-

Los sistemas (2.1) y (2.2) son hiperbólicos.

2.1. Método de las características

En esta parte nos referimos a las curvas características de la ecuación de convection, las cuales son importantes para la comprensión de la solución analítica y la solución numérica que generan.

Supongamos que deseamos determinar la solución analítica del problema de valor inicial

$$(\text{PVI}) \quad \begin{cases} a(x,t)u_t + b(x,t)u_x + c(x,t)u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.5)$$

a lo largo de una curva arbitraria, en la cual se encuentran los puntos P y Q a una distancia infinitesimal. El cambio de u desde P hasta Q se denota por du y se puede escribir en su forma diferencial

$$du = u_t dt + u_x dx \quad (2.6)$$

Introducimos nuevas coordenadas s y τ con la propiedad de que s varía a lo largo de las curvas características y τ varía a lo largo de la curva inicial, y denotamos $\tilde{u}(\tau, s) = u(t, x)$. Luego la variación a lo largo de la curva característica respecto al nuevo parámetro s es:

$$\frac{du}{ds} = u_t \frac{dt}{ds} + u_x \frac{dx}{ds} \quad (2.7)$$

Entonces comparando (2.5) con (2.6) se tiene

$$\frac{dt}{ds}u_t + \frac{dx}{ds}u_x = -bu$$

donde se puede hacer una identificación de coeficientes con el **PVI** siguiendo los pasos siguientes:

Paso 1: Solucionar las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= a(x,t), & t(0) &= 0 \\ \frac{dx}{ds} &= b(x,t), & x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las soluciones de (2.8) dadas por $(t, x) = (t(s), x(s))$ son llamadas **curvas características** del **PVI**.

Paso 2. Hallar la solución, $\tilde{u}(s, \tau)$, de la ecuación diferencial ordinaria

$$(\text{PVI}) \quad \begin{cases} \frac{d\tilde{u}}{d\tau} + c(x(s, \tau), t(s, \tau))\tilde{u} = 0, & s \in \mathbb{R}, \quad \tau > 0 \\ \tilde{u}(0) = u_0(\tau), & \tau \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.9)$$

Paso 3. Utilizar el cambio de coordenadas $x = x(s, \tau)$, $t = t(s, \tau)$ para regresar a las variables originales (x, t) y dar la solución $u(x, t)$ del **PVI**.

1.0.1 Ejemplo.-

Resolver el problema de valor inicial, $a > 0$

$$(\text{P}) \quad \begin{cases} u_t + au_x + 2u = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = \text{sen}(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Encontramos la curvas características:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= 1, & t(0) &= 0 \\ \frac{dx}{ds} &= a, & x(0) &= x_0\end{aligned}$$

resolviendo tenemos

$$t(s) = s, \quad x(s) = as + x_0, \quad s > 0$$

Por tanto las curvas características parametrizadas son:

$$\begin{aligned}x &= as + x_0 \\ t &= s, \quad s > 0\end{aligned}$$

pudiéndose escribir en la forma

$$x - at = x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

lo cual significa que las curvas características son rectas en el plano XT .

Ahora resolvemos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned}\frac{du}{ds} + 2u &= 0, \quad s > 0 \\ u(0) &= \text{sen}(x_0)\end{aligned}$$

la cual tiene por solución general $u(s) = Ce^{-2s}$. Verificamos que se cumplan las condiciones iniciales se tiene que

$$u(s, \tau) = e^{-2s} \text{sen}(x_0)$$

Regresando a las variables originales tenemos la solución del **PVI**

$$u(x, t) = e^{-2t} \text{sen}(x - at)$$

1.0.2 Ejemplo.-

Resolver el problema de valor inicial

$$(\text{PVI}) \quad \begin{cases} u_t + au_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Resolviendo las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\frac{dt}{ds} &= 1, & t(0) &= 0 \\ \frac{dx}{ds} &= a, & x(0) &= x_0\end{aligned}$$

tenemos

$$t(s) = s, \quad x(s) = as + x_0, \quad s > 0$$

Por tanto las curvas características son:

$$\begin{aligned} x &= as + x_0 \\ t &= s, \quad s > 0 \end{aligned}$$

pudiéndose escribir en la forma

$$x - at = x_0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Las cuales son rectas paralelas como se ve en la Figura (2.1).

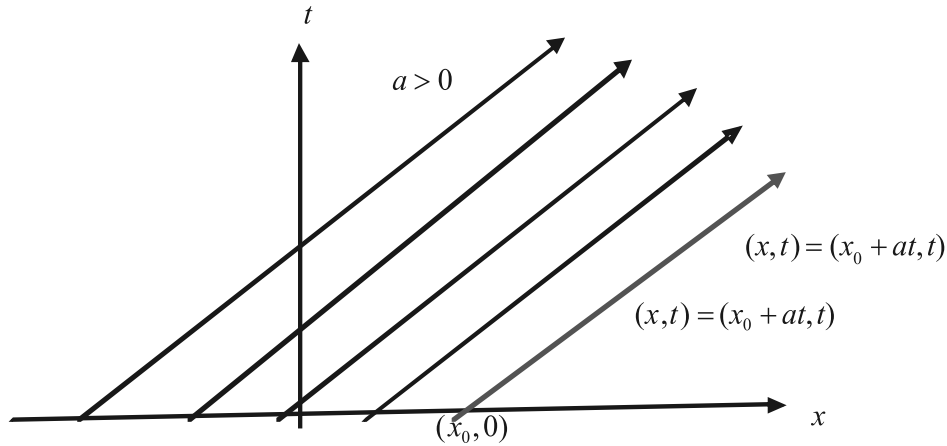


Figura 2.1: Rectas paralelas - líneas características

Ahora debemos resolver la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 0 \\ u(0) &= u_0(x_0), \quad s > 0 \end{aligned}$$

la cual tiene solución $u(s, \tau) = u_0(x_0)$.

Regresando a las variables originales x y t , mediante el cambio de variable $x - at = x_0$, tenemos la solución del **P**

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad t > 0$$

la cual representa una traslación de la onda inicial $u_0(x)$. Si $a > 0$ la onda se desplazada a la derecha con una velocidad constante a y si $a < 0$ la onda se traslada a la izquierda con velocidad constante a .

1.1 Nota.-

La ecuación modelo

$$u_t + au_x = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (2.10)$$

es una version simplificada de la ecuación del transporte, que modela, por ejemplo, la polución en una área, la dispersion de contaminantes, o incluso el flujo de tráfico, donde u representa la densidad de la polución (contaminantes o tráfico) en la posición x y tiempo t .

La ecuación (2.10) puede escribirse en la forma

$$(1, a)^T \cdot \nabla u = 0 \quad (2.11)$$

donde $\nabla = (\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x})$.

La ecuación (2.11) dice que la derivada direccional en la dirección del vector $v = (1, a)^T$ (en el plano tx) es cero. Así la solución $u(x, t)$ debe ser constante en esta dirección. En el plano tx , las rectas paralelas $x = at$ siguen la dirección del vector v . Estas rectas paralelas $x = at$ son llamadas las *características* de la ecuación (2.10).

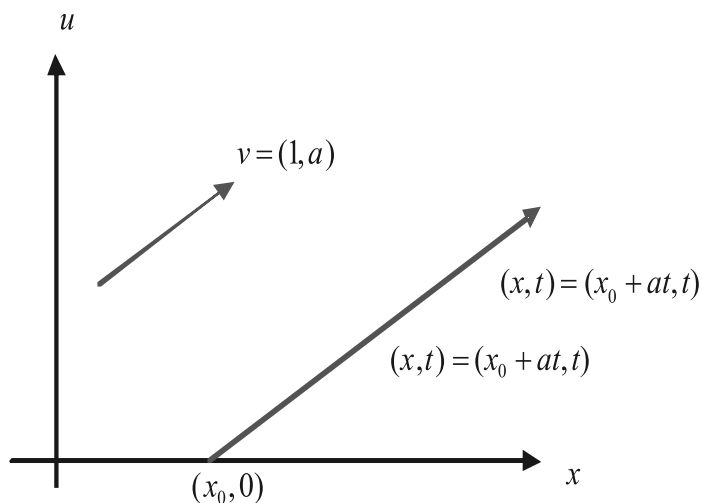


Figura 2.2: A lo largo de las rectas características la solución es la misma

Ahora, fijamos un punto sobre el eje x , por ejemplo $(x_0, 0)$. La recta que pasa a través de este punto, paralela a $x = at$ es dado por $x = x_0 + at$. Desde que nuestra solución es constante a lo largo de esta recta tenemos

$$u(x, t) = u(x_0 + at, t) = u(x_0, 0) \quad (2.12)$$

pero de la condición inicial se tiene

$$u(x_0, 0) = u_0(x) \quad (2.13)$$

donde u_0 es conocido. Así tenemos que para cualquier (x, t)

$$u(x, t) = u_0(x_0) \quad (2.14)$$

entonces la solución de (2.10) está dada por

$$u(x, t) = u_0(x_0) = u_0(x - at) \quad (2.15)$$

La función (2.15), solución de la ecuación (2.10) puede interpretarse de la siguiente manera:

1. En cualquier tiempo $t_0 > 0$, la solución es una réplica de la condición inicial, pero desplazada a la derecha si $a > 0$ y a la izquierda si $a < 0$, hasta una posición $|a|t_0$
2. La solución en (x, t) depende únicamente del valor $\zeta = x - at$.
3. Las rectas $x - at = \zeta$ en el plano (x, t) se llaman características de la ecuación (2.10).
4. El parámetro a tiene dimensión de distancia dividida por el tiempo, y se llama velocidad de propagación a lo largo de la característica.
5. Si la condición inicial es una onda, la solución expresada en (2.15) dice que en cualquier tiempo la onda inicial se propaga con velocidad a sin cambiar de forma.

Una generalización del problema hiperbólico es la siguiente

$$(\mathbf{P}) \quad \begin{cases} u_t + au_x + bu = f(x, t), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.16)$$

donde a, b son constantes y f es una función en las variables x y t .

Basados en la observaciones anteriores, hacemos el cambio de variables

$$\begin{cases} \tau = t, \\ \zeta = x - at, \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} t = \tau, \\ x = \zeta + a\tau. \end{cases} \quad (2.17)$$

luego definiendo $\bar{u}(\zeta, \tau) = u(x, t)$, donde (ζ, τ) y (x, t) están relacionadas por el cambio de variable definida previamente, entonces la ecuación en (2.16) se transforma en

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = \frac{\partial t}{\partial \tau} u_t + \frac{\partial x}{\partial \tau} u_x = u_t + au_x = -bu + f(\zeta + a\tau, \tau)$$

es decir

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = -b\bar{u} + f(\zeta + a\tau, \tau)$$

la cual es una ecuación diferencial ordinaria en τ y cuya solución depende de ζ y es de la forma

$$u(x, t) = u_0(x - at)e^{-b\tau} + \int_0^\tau f(\zeta + as, s)e^{-b(\tau-s)} ds, \quad (2.18)$$

Usando la inversa del cambio de variable se tiene

$$u(x, t) = u_0(x - at)e^{-b\tau} + \int_0^t f(x - a(t-s), s) + as, s) e^{-b(\tau-s)} ds, \quad (2.19)$$

Notar que $u(x, t)$ depende solamente de los valores de (x_1, t_1) tal que $x - at = x_1 - at_1$, es decir, la solución depende únicamente de los valores de u y f sobre las características que pasan por (x, t) , para $0 \leq t_1 \leq t$. Este método de solución puede extenderse fácilmente a ecuaciones no lineales de la forma

$$u_t + au_x = f(x, t, u).$$

El método de las características puede ser útil para interpretar, aunque no expresa explícitamente la solución del problema no lineal,

$$u_t + g(u)u_x = 0$$

Ya que se puede conocer la solución sobre cada curva particular, pero no en todas al mismo tiempo, [?].

Ahora presentamos el problema no lineal de valor inicial

$$(P) \quad \begin{cases} u_t + g(u)u_x = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.20)$$

en donde por analogía con el problema lineal podemos suponer que una onda se empieza a mover desde x_0 con una velocidad de $g(u)$. Entonces, después de t segundos la posición de la onda x está dada por:

$$x = x_0 + g(u)t$$

Como la concentración dada por la función $u(x, t)$ permanece constante a lo largo de la curva característica, podemos escribir

$$g(u) = g[u(x_0, 0)]$$

por lo tanto la **curva característica** que comienza en $(x_0, 0)$ tiene por ecuación

$$x = x_0 + g[u(x_0, 0)]t$$

Entonces la solución del problema **P** no lineal está dada por la solución implícita de la función

$$u(x, t) = u_0(x) = u_0(x - g[u(x_0, 0)]t) \quad (2.21)$$

Definimos la función auxiliar

$$\phi(x, t, u) = u - u_0(x - g[u]t) = 0$$

la cual involucra la solución $u = u(x, t)$ garantizada por el teorema de la función implícita, es decir, puede ser reescrita en la forma:

$$\phi_u(x, t, u) = 1 + u'_0(x - g[u]t)g'[u]t \neq 0 \quad (2.22)$$

la que es válida para $|t|$ suficientemente pequeño a fin de tener una solución u .

1.0.3 Ejemplo.-

Sea la ecuación

$$u_t + 3uu_x = 0 \quad (2.23)$$

con condiciones iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Las curvas características que comienzan en el punto $(x_0, 0)$ están dadas por

$$x = x_0 + g[u(x_0, 0)]t, \quad g(u) = 3u$$

luego

para $x_0 < 0$ se tiene las rectas

$$x = x_0 + g[0]t$$

$$x = x_0$$

es decir, son rectas verticales.

Para $x_0 > 0$, se tiene las rectas

$$x = x_0 + g[1]t$$

$$x = x_0 + 3t$$

de donde se obtiene rectas paralelas. La figura (2.1) muestra las rectas verticales y paralelas. Se observa que la solución u es cero para $x < 0$ y $x < x_0 + \xi t$, en tanto que para $0 < x < x_0 + \xi t$ se define una solución que garantice la continuidad. Esta solución se llama onda de rarefaction.

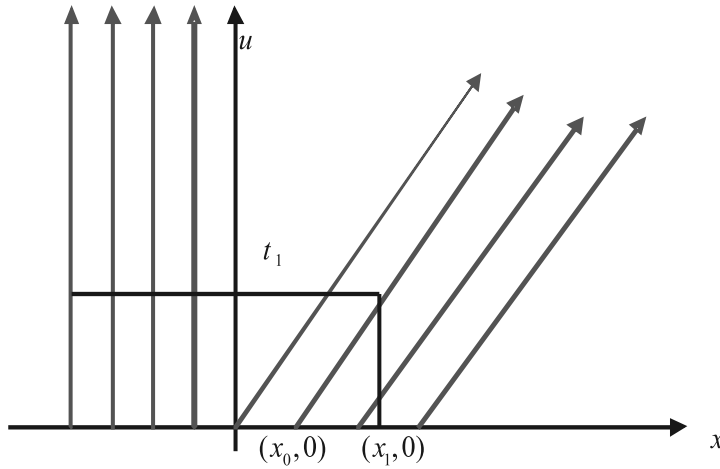


Figura 2.3: Rectas características de la ecuación de Burger

2.2. Sistemas de ecuaciones hiperbólicas

Una ley de conservación es una ecuación de continuidad que expresa la conservación de una cierta cantidad dada por ejemplo por la función u , la cual representa la energía, masa, momento, temperatura, etc.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}$. La forma general de un sistema de leyes de conservación en varias variables es dado por el siguiente sistema

$$u_t + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(u) = 0 \quad (2.24)$$

donde

$$u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m; \quad f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$$

u se llama el vector de las variables de conservación. La función f_i diferenciables es llamada **función de flujo**, las cuales representan un mecanismo de transporte de la cantidad u .

2.1 Definición.-

Sean las funciones $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f_i : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$; $i = 1, \dots, n$ donde n es la dimensión del problema y m indica si el problema es escalar ($m = 1$) o un problema vectorial ($m > 1$), entonces la ecuación

$$u_t + \sum_{i=1}^n [f_i(u)]_{x_i} = 0 \quad (2.25)$$

se dice que tiene forma conservativa

En el caso $n = 1$, el sistema (2.25) toma la forma

$$u_t + [f(u)]_x = 0 \quad (2.26)$$

donde $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^m$; $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

Si a la ecuación (2.26) le adicionamos una condición una inicial continua $u(x, 0) = u_0(x)$, $x \in \mathbb{R}$, el problema es llamado problema de Cauchy o problema de valor inicial. Este sistema tiene solución suave o clásica si la solución u es por lo menos de clase C^1 y si además la matriz Jacobiana de f , función de flujo, tiene solo valores propios reales y es diagonalizable para cada valor de u , entonces el sistema (2.25) es hiperbólico.

Ahora damos un ligero vistazo a los sistemas de ecuaciones hiperbólicas en una dimensión, aunque la incógnita u es un vector n – dimensional.

De acuerdo a la definición de las ecuaciones hiperbólicas se puede decir que el sistema

$$u_t + Au_x = F(x, t) \quad (2.27)$$

es hiperbólico si la matriz A es diagonalizable, es decir existe una matriz no singular P tal que $PAP^{-1} = D$ donde $D = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Los autovalores de A son las velocidades características del sistema (2.27). Bajo el cambio de variables $w = Pu$ en el sistema (2.27), tenemos

$$w_t + Dw : x = PF(x, t) = \tilde{F}(x, t),$$

$$w_t^i + a_i w_x^i = \tilde{f}^i(x, t),$$

las cuales son de la forma (2.16). Podemos decir que el sistema hiperbólico unidimensional se reduce a un conjunto de n ecuaciones hiperbólicas independientes.

2.0.1 Ejemplo.-

El sistema

$$\begin{cases} u_t + 2u_x + v_x = 0 \\ v_t + u_x + 2v_x = 0 \end{cases}$$

se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x = 0.$$

La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

tiene como autovalores las raíces del polinomio

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^2 - 1$$

de donde se tiene que las raíces son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$ y, por lo tanto, el sistema es hiperbólico.

2.3. Derivación de leyes de conservación

Forma diferencial e integral de la ley de conservación

A continuación veremos el problema de la dinámica de gases, derivando la ecuación para conservación de masa en una dimensión.

Suponga el flujo de un gas a través de un tubo, el cual tiene velocidad constante en cada sección del tubo. Sea x la distancia a lo largo del tubo, $\rho(x, t)$ la densidad del gas en cada punto x en el tiempo t .

La masa m del gas en la sección $[x_1, x_2]$ del tubo es definida por

$$m = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (2.28)$$

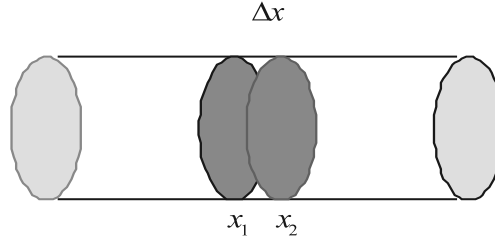


Figura 2.4: *Tubo por el cual se transporta gas a velocidad constante*

masa en la sección del tubo $[x_1, x_2]$.

Sea además $v(x, t)$ la velocidad del gas en el punto x en el instante t , entonces la **tasa de flujo o masa de flujo** que pasa por este punto se define como

$$\text{masa de flujo} = \rho(x, t)v(x, t) \quad (2.29)$$

luego, la razón de cambio de masa en $[x_1, x_2]$ viene dada por la diferencia de flujos en x_1 y x_2 , esto es,

$$\frac{dm}{dt} = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t) \quad (2.30)$$

entonces, de (2.28) tenemos

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx = \rho(x_1, t)v(x_1, t) - \rho(x_2, t)v(x_2, t) \quad (2.31)$$

la cual es una **forma integral de la ley de conservación de masa** cuya solución, de ser hallada, es la solución exacta del problema, que por lo general es difícil resolver.

Otra forma integral de (2.31) es expresar la masa en $[x_1, x_2]$ en el tiempo t_2 , ($t_2 > t_1$) en términos de la masa en el tiempo t_1 , y el flujo total en las fronteras para este período. Para obtener esta nueva forma integral, basta integrar (2.31) en $[t_1, t_2]$ dando lugar a la expresión

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_2) dx &= \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t_1) dx + \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1, t)v(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_2, t)v(x_2, t) dt \\ \int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dt &= \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_1, t)v(x_1, t) dt - \int_{t_1}^{t_2} \rho(x_2, t)v(x_2, t) dt \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ahora para obtener una forma diferencial de la ley de conservación, asumiremos que las funciones $\rho(x, t)$ y $v(x, t)$ son diferenciables. Entonces, la variación de la densidad en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ está dada por

$$\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dt \quad (2.33)$$

y la variación del flujo de masa en el intervalo $[x_1, x_2]$ es

$$\rho(x_2, t)v(x_2, t) - \rho(x_1, t)v(x_1, t) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx$$

Por otro lado de la expresión (2.32) tenemos

$$\int_{x_1}^{x_2} [\rho(x, t_2) - \rho(x, t_1)] dx = - \int_{t_1}^{t_2} [\rho(x_2, t)v(x_2, t) - \rho(x_1, t)v(x_1, t)] dx$$

Utilizando (2.33) se tiene:

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dt dx = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx dt$$

intercambiando variables de integración en la primera integral

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) dx dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x, t)v(x, t)) dx dt$$

factorizando

$$\int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t)v(x, t) \right] dx dt = 0$$

Esta última ecuación es válida para cualquier sección $[x_1, x_2]$ sobre el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ y en consecuencia se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \rho(x, t)v(x, t) = 0 \quad (2.34)$$

la cual es la **forma diferencial de la ley de conservación de la masa** en dinámica de gases.

La ley de conservación (2.34) puede solucionarse aisladamente si la velocidad $v(x, t)$ es conocida apriori o es conocida como función de $\rho(x, t)$. Si esto sucede, entonces ρv es una función de ρ solamente y podemos escribir $f(\rho) = \rho v$. Luego, la ecuación (2.34) se convierte en una ley de conservación escalar de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} f(\rho(x, t)) = 0 \quad (2.35)$$

La ecuación (2.34) es resuelta con las ecuaciones de conservación de momento y energía dadas por

$$[\rho(x, t)v(x, t)]_t + [\rho(x, t)v^2(x, t) + P(x, t)]_x = 0 \quad (2.36)$$

$$E_t + [v(E + P)]_x = 0 \quad (2.37)$$

Entonces se forma un sistema de ecuaciones de conservación llamadas ecuaciones de Euler para la dinámica de gases.

Si introducimos el vector $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{bmatrix} \rho(x, t) \\ \rho(x, t)v(x, t) \\ E(x, t) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema de ecuaciones (2.34), (2.36) y (2.37) puede ser escrito como

$$\mathbf{u}_t + [f(\mathbf{u})]_x = 0 \quad (2.38)$$

donde

$$f(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + P \\ v(E + P) \end{bmatrix}$$

donde ρ : densidad, v : velocidad, E : energía y P : presión.

La forma (2.38) es la **forma diferencial de la ley de conservación**.

2.4. Leyes de conservación escalar

Ecuación lineal de convección o advection

Asuma que la velocidad es constante a en la ecuación (2.34), entonces con una variable arbitraria u en lugar de ρ se tiene

$$u_t + au_x = 0 \quad (2.39)$$

Esta ecuación conservativa lineal es conocida como la **ecuación de advection o primera forma de la ecuación de la onda**, la cual es resuelta con el dato inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad (2.40)$$

Las ecuaciones (2.39) y (2.40) forman un problema de Cauchy cuya solución se encuentra por traslación de la condición inicial $u_0(x)$, esto es,

$$u(x, t) = u_0(x - at)$$

que se traslada a lo largo de las rectas características $x - at = x_0$ con $x'(t) = a$ y $x(0) = x_0$.

Hay que notar que si $u_0 \in C^1$, entonces $u \in C^1$ y que las rectas características no se cruzan.

Teorema 1

Sea u una solución suave del sistema (2.39) y (2.40), entonces esta solución permanece constante a lo largo de las curvas características.

Prueba. Si derivamos la solución $u(x, t)$ a lo largo de una de las curvas características, encontramos la razón de cambio de u ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= \frac{\partial}{\partial t}u(x(t), t) + \frac{\partial}{\partial x}u(x(t), t)x'(t) \\ &= u_t + au_x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, confirmamos que u es constante a lo largo de las curvas características cuando u es suave. ■

Si la velocidad depende de la variable x , es decir, $a(x)$, una función suave. Luego la ecuación (2.34) tiene la forma

$$u_t + (a(x)u)_x = 0$$

que es una **ecuación de convection**, la cual se puede escribir en la forma

$$u_t + a(x)u_x + a'(x)u = 0 \quad (2.41)$$

En este caso, las curvas características son la solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned}$$

Luego, la solución $u(x, t)$ no es constante a lo largo de estas curvas, pues

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = -a'(x(t))u(x(t), t) \neq 0$$

Dominio de dependencia. Si consideramos el problema de valor inicial (2.39) - (2.40). La solución en el punto (x, t) depende del valor de u_0 en el punto x_0 , donde $x_0 = x - at$. El punto x_0 es llamado dominio de dependencia del punto (x, t) . El dominio de dependencia del punto (x, t) es el conjunto de todos los puntos en el cual la solución del problema de valor inicial (2.39) - (2.40) en el punto (x, t) está dependiendo.

4.1. Condiciones de contorno en la ecuación de convection

Si consideramos una ecuación diferencial definida sobre un intervalo finito en lugar de la recta real, entonces estamos frente a un problema que necesita imponer algunas condiciones concretas en los extremos del intervalo. La mayoría de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales están definidas en dominios con frontera. Las condiciones que relacionan la solución de la ecuación diferencial con los datos de frontera lo llamamos, condiciones de contorno.

El problema de determinar una solución para la ecuación diferencial con condición inicial y condición de contorno se llama problema de valor inicial y de contorno.

La discusión de problemas de valores de contorno sirve para ilustrar de nuevo la importancia del concepto de características, por ejemplo si consideramos el problema

$$(PVIC) \quad \begin{cases} u_t + au_x = 0, & 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), & -\infty < x < \infty. \\ u(0, t) = g(x, t), & t \geq 0, \quad 0 < x < 1. \end{cases} \quad (2.42)$$

Si $a > 0$, las rectas características en el dominio de definición se propaga de izquierda a derecha según la figura (2.5). Examinando la misma vemos que es suficiente que se especifique los datos iniciales y los valores en el extremo $x = 0$ para tener la solución en cada tiempo $t > 0$. Mas aún no es necesario tener datos en el otro extremo $x = 1$, lo cual convertirá al problema en sobredeterminado.

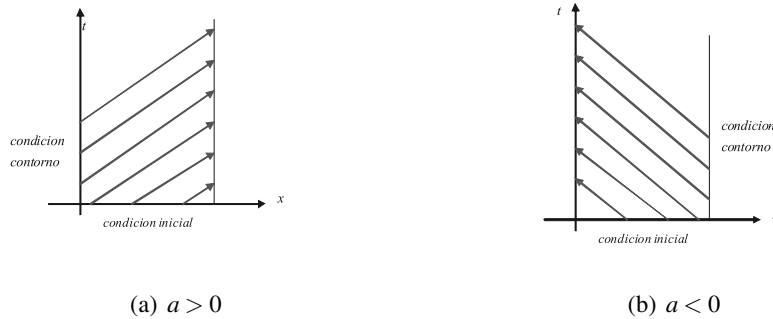


Figura 2.5: Líneas rectas caracterísitcas

Por ejemplo, consideremos la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ y la condición de contorno $u(0, t) = g(t)$, la solución del problema se puede escribir en la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - at) & , \quad \text{si } x - at > 0 \\ g(t - a^{-1}x) & , \quad x - at < 0 \end{cases}$$

A lo largo de la característica $x - at = 0$ existirá un salto de discontinuidad en u si $u_0(0) = g(0)$.

Si $a < 0$ el rol de las fronteras son intercambiados, figura 2.5.

2.5. Esquemas de diferencias finitas

Empezamos nuestra discusión de los esquemas de diferencias finitas definiendo una malla de puntos en el plano (x, t) . Sean h y k números positivos; entonces la malla serán los puntos $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ para enteros arbitrarios n y m . Para una función v definida sobre la malla escribimos v_m^n para el valor de v en el punto de la malla (x_m, t_n) . Usamos la notación $u_m^n = u(x_m, t_n)$ cuando u es una función continua en (x, t) . El conjunto de puntos (x_m, t_n) para un valor fijo de n es llamado *nivel de malla n* . Estamos interesados en mallas con valores pequeños de h y k ¹

La idea básica de los esquemas de diferencias finitas es reemplazar las derivadas por diferencias finitas. Esto puede ser hecho en muchas formas, por ejemplo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{u(x_m, t_n + k) - u(x_m, t_n)}{k}$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_m, t_n) \approx \frac{u(x_m, t_n + k) - u(x_m, t_n - k)}{2k}$$

Fórmulas similares se obtienen para aproximar la derivada con respecto a x .

Usando estas aproximaciones obtenemos los siguientes esquemas de diferencias finitas para la ecuación de (2.39). Otros esquemas se presentarán más adelante.

¹En muchos libros h y k son representados por Δx y Δt respectivamente

Esquemas explícitos*Upwind hacia delante, $a < 0$*

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} = 0 \quad (2.43)$$

Upwind hacia atras, $a > 0$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (2.44)$$

Leapfrog

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.45)$$

Forward – time central – space

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.46)$$

Lax – Friedrichs

$$\frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)}{k} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.47)$$

Lax – Wendroff

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{h} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} - a^2 \frac{k}{2} \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2} = 0 \quad (2.48)$$

Esquemas implícitos*Backward – time central – space*

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0 \quad (2.49)$$

Backward – time Backward – space

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + a \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0 \quad (2.50)$$

Crank – Nicolson

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} + \frac{a}{2} \left(\frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} \right) = 0 \quad (2.51)$$

Cada uno de los seis esquemas (2.43) y (2.48) puede ser escrito como una combinación lineal v_j^{n+1} de los valores de v en los niveles n y $n - 1$. Por ejemplo, el esquema (2.43) puede ser escrito como

$$v_j^{n+1} = (1 + C_r)v_j^n - C_r v_{j+1}^n \quad (2.52)$$

donde $C_r = a \frac{k}{h}$. La constante C_r aparecerá muchas veces en el estudio de esquemas para ecuaciones hiperbólicas y será siempre igual a $a \frac{k}{h}$. Aquellos esquemas que involucran

v en solo dos niveles, por ejemplo, $n + 1$ y n son llamados *esquemas de un paso*. Los esquemas de dos niveles que listamos antes, todos excepto el esquema de Leapfrog (2.45) son esquemas de un paso.

Para un esquema de multipaso no es suficiente especificar los valores de v_j^0 para determinar v_j^n para todos los valores positivos de n . Para especificar completamente el significado de la solución computalizada en un esquema de multipaso debemos de uno u otro modo especificar v sobre algunos niveles de tiempo, así que el esquema puede ser empleado para especificar un procedimiento computalizado los valores de v sobre estos niveles iniciales. Por ejemplo, para usar el esquema de Leapfrog podemos especificar los valores de v_j^0 y v_j^1 para todo j , o podemos especificar algún esquema para calcular los valores de v_j^1 de los valores de v_j^0 . En cualquier caso, el esquema Leapfrog debe ser usado para calcular $v_j^n, n > 1$.

Cuando nos referimos al esquema de Leapfrog no siempre hacemos distinción entre los dos tiempos iniciales de cálculo. Muchas de las propiedades del esquema de Leapfrog son independientes del método usado para inicializar la solución. Es de práctica usar un esquema de un paso para inicializar el esquema.

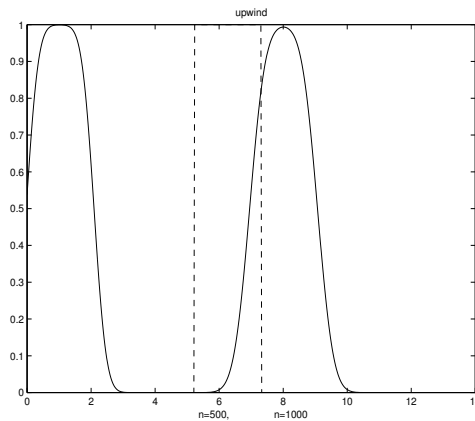
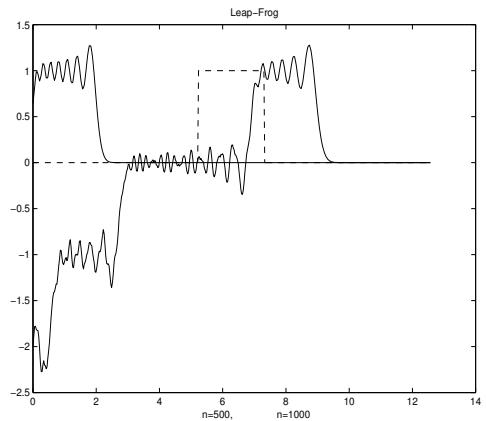
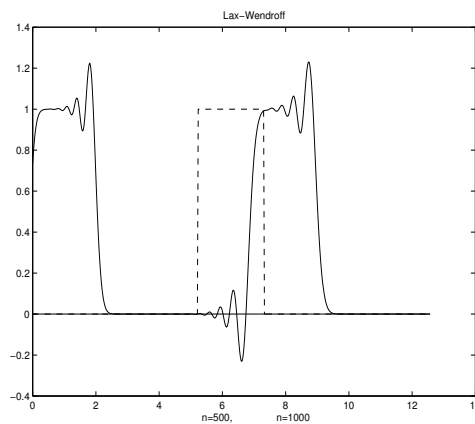
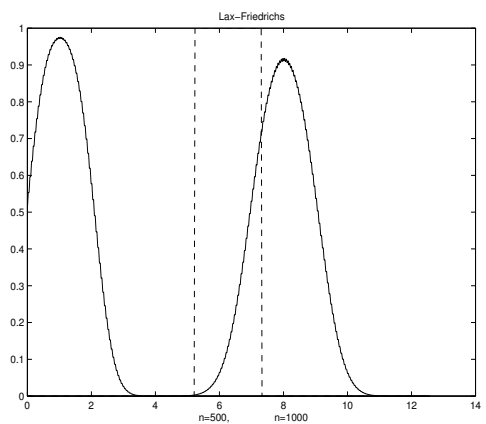
Para tener un panorama de los tópicos que seguiremos discutiendo, hagamos un comentario de los resultados obtenidos con los esquemas propuestos anteriormente. Para ello consideremos el **PVI**, donde $0 < x < 2\pi, t > 0$ teniendo como condición inicial la función 2π -periódica seccionalmente continua

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < \frac{2\pi}{3}, \\ 1, & \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{3}, \\ 0, & \frac{4\pi}{3} < x \leq 2\pi, \end{cases} \quad (2.53)$$

A continuación se muestra una sección de pseudocódigo, la cual nos permitirá observar el comportamiento del periodo principal de esta función considerado como una onda. Para ello elegimos el esquema de Lax-Friedrichs, los demás tienen similar estructura

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{do } n = 0, N_{\max} \\ \text{do } j = -19, 29 \\ \quad v_{j,n+1} \leftarrow 0.5 (v_{j+1,n} + v_{j-1,n}) - C_r 0.5 (v_{j+1,n} - v_{j-1,n}) \\ \text{end do} \\ \text{end do} \end{array} \right. \quad (2.54)$$

Como sabemos la solución de este problema está dada por $u(x, t) = u_0(x - at)$ y es constante a lo largo de las características $x - at = \text{cte}$. En las figuras siguientes presentamos las soluciones numéricas que son aproximaciones de la solución del problema (2.53), con $a = 1, h = 2\pi/240, k = 2h/3$ en $t = 500k$ y en $t = 1000k$.

Figura 2.6: *Upwind*Figura 2.7: *Leapfrog*Figura 2.8: *Lax -Wendroff*Figura 2.9: *Lax-Friedrichs*

En las figuras (2.6) - (2.9) la solución exacta de la ecuación diferencial está dada por la línea punteada y la solución numérica para el esquema respectivo está dada por la línea continua en cada caso.

En las figuras podemos observar que los esquemas de diferencias calculan la solución adecuadamente lejos de las discontinuidades, pero cerca de estas no se muestra una buena aproximación a la solución.

Observar que el esquema Leapfrog genera muchas oscilaciones cerca de las discontinuidades. El método Lax-Wendroff tiene sobreoscilaciones y suboscilaciones cerca de las discontinuidades, pero no se propagan inmediatamente. Los métodos de Lax-Friedrichs y Upwind no tienen suboscilaciones ni sobreoscilaciones, sin embargo cerca de las discon-

tinuidades se separan mucho de la solución exacta, podríamos decir que sus discontinuidades ocupan regiones más extensas.

Para tiempos bajos (primeros niveles de t) la solución tiene un comportamiento aceptable, pero a medida que t crece la separación de la solución exacta es más acentuada, especialmente en los esquemas Upwind y Lax-Fredrichs, porque estos esquemas de diferencias incorporan algunas propiedades que el problema original no lo tiene, como es el caso de la disipación numérica.

5.1. La condición de Courant-Friedrichs-Lewy CFL

El número de Courant se define por $C_r = a\lambda$, donde $\lambda = \frac{k}{h}$. El comportamiento de este número es muy importante, porque de él depende la estabilidad del esquema de diferencias finitas; ya que una condición sobre este número da argumentos sobre la propagación de la información.

La interpretación de este número se puede expresar en la forma

$$C_r = \frac{a}{\frac{1}{\lambda}} = \frac{a}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\text{velocidad de propagación de la solución analítica}}{\text{velocidad de propagación de la solución numérica}}. \quad (2.55)$$

esto quiere decir que la velocidad de propagación de la solución analítica es acotada por la velocidad de la solución numérica.

Veremos que una condición sobre C_r es una condición necesaria para la estabilidad de los esquemas explícitos. Esta condición llamada la condición de **Courant-Friedrichs-Lewy (CFL)**.

2.6. Estabilidad para esquemas de diferencias explícitos

6.1. Esquema forward-time central-space FTCS

El correspondiente esquema de diferencias finitas FTCS representa a la ecuación de convección por

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0. \quad (2.56)$$

El esquema (2.56) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^n - 0.5C_r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ &= Qv_j^n \end{aligned} \quad (2.57)$$

donde $Q = I - 0,5C_r(S_+ - S_-)$, el cual es consistente con la ecuación $u_t + au_x = 0$ con un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t, (\Delta x)^2)$.

En (2.57), C_r es llamado el *número de Courant* y es definido por

$$C_r = a \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (2.58)$$

Aplicamos el análisis de estabilidad de von Neumann a (2.57), genera el factor de amplificación g el cual se obtiene reemplazando v_j^n por $g^n e^{ij\theta}$, $j = 1, 2, \dots, N-1$; $n = 0, 1, 2, \dots$ en (2.57):

$$\begin{aligned} g &= 1 - 0,5C_r(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= 1 - iC_r \sin\theta \end{aligned} \quad (2.59)$$

de donde se obtiene que

$$|g|^2 = 1 + C_r^2 \sin^2 \theta$$

obviamente, $|g|^2 \geq 1$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, así que el esquema (2.56) *incondicionalmente inestable*. En la figura (2.28) se muestra la gráfica de g en el plano complejo \mathbb{C} que corresponde a una recta vertical que pasa por el punto $x = 1$.

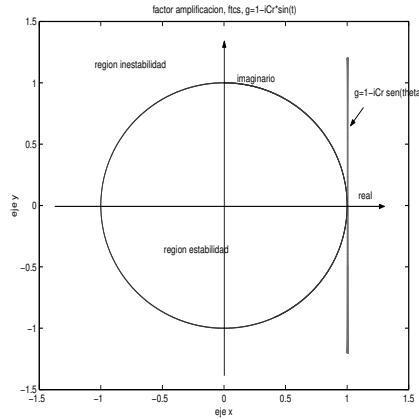


Figura 2.10: Factor amplificación FTCS

2

Debido a la carencia de estabilidad del esquema de diferencias **FTCS**, es que no es muy usado para problema de convección pura, pero si va acompañado de difusión se usa siempre con mucho cuidado.

²Es posible hacer una análisis de estabilidad definiendo la función cuadrática en función de $\sin\theta$.

6.2. Esquema Upwind

Upwind hacia atrás

Un esquema alternativo es obtenido introduciendo el operador de diferencia regresiva para u_x asumiendo que a es positivo. Así, de convección puede ser escrito como

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.60)$$

puede ser escrito en forma de algoritmo

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= (1 - C_r)v_j^n + C_r v_{j-1}^n \\ &= Q v_j^n \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde $Q = (1 - C_r)I + C_r S_-$ es el operador de diferencias, el cual es consistente con la ecuación $u_t + au_x = 0$ con un orden de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$.

Para hacer un análisis de estabilidad usamos el criterio de Von Neumann que consiste en sustituir v_j^n por $g^n e^{ij\theta}$ en (2.61)

$$\begin{aligned} g &= 1 - C_r(1 - e^{-i\theta}) \\ &= (1 - C_r) + C_r e^{-i\theta} \\ &= 1 - C_r(1 - \cos \theta) - iC_r \sin \theta. \end{aligned}$$

entonces tenemos el factor de amplificación

$$\begin{aligned} g &= 1 - C_r(1 - \cos \theta) - iC_r \sin \theta \\ &= (1 - C_r) + C_r e^{-i\theta} \end{aligned} \quad (2.62)$$

cuya gráfica es una circunferencia con centro en el punto $(1 - C_r, 0)$ y radio C_r para $\theta \in \mathbb{R}$.

Ahora para tener una idea gráfica del comportamiento del factor de amplificación complejo (2.62) lo parametrizamos en la forma

$$\begin{cases} x = 1 - (1 - \cos \theta)C_r \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases}$$

donde $\theta \in [0, 2\pi]$.

Graficando tenemos una circunferencia con centro en $(1 - C_r, 0)$ y de radio C_r de la forma

$$\frac{(x - (1 - C_r))^2}{C_r^2} + \frac{y^2}{C_r^2} = 1 \quad (2.63)$$

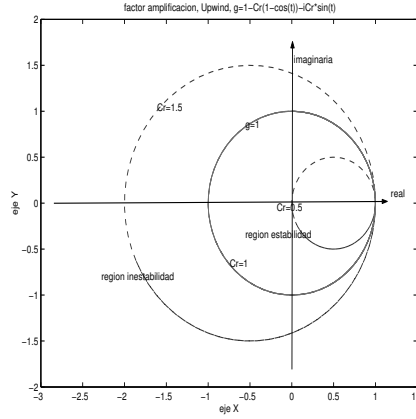


Figura 2.11: Factor amplificación Upwind

Soluciones estables son obtenidas si

$$C_r = a \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1. \quad (2.64)$$

La desigualdad $C_r \leq 1$ es la condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL).

La figura (2.11) muestra que para $C_r = 0.5$ la circunferencia que se genera se encuentra contenida dentro de la región de estabilidad dada por la circunferencia $|g|^2 = 1$. Para $C_r = 1.5$ la circunferencia generada sale fuera de la región de estabilidad, representando inestabilidad del esquema para este caso. En este caso decimos que el esquema Upwind es *condicionalmente estable*.

Upwind hacia delante

Si introducimos el operador de diferencia progresiva para u_x y asumiendo que a es negativo, entonces $u_t + au_x = 0$. Puede ser escrito como

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{\Delta x} = 0 \quad (2.65)$$

el cual en forma explícita puede ser escrito como

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= (1 - C_r)v_j^n + C_r v_{j+1}^n \\ &= Q v_j^n \end{aligned} \quad (2.66)$$

donde $Q = (1 - C_r)I + C_r S_+$.

Aplicando el análisis de estabilidad de von Neumann a (2.66) obtenemos el factor de amplificación

$$\begin{aligned} g &= 1 - C_r(1 - \cos \theta) + iC_r \sin \theta \\ &= (1 - C_r) + C_r e^{i\theta} \end{aligned}$$

cuya gráfica es una circunferencia con centro en el punto $(1 - C_r, 0)$ y radio C_r para $\theta \in \mathbb{R}$.

De donde se tiene que las condiciones de estabilidad son las mismas que para el esquema Upwind hacia atrás.

6.3. Esquemas Leapfrog

Ahora damos el esquema de Leapfrog para la ecuación de convection $u_t + au_x = 0$

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0, \quad (2.67)$$

el cual en forma explícita se escribe como

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} &= v_j^{n-1} - C_r(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) \\ &= v_j^{n-1} + Qv_j^n \end{aligned} \quad (2.68)$$

donde $Q = -C_r(S_+ - S_-)$

La ecuación (2.68) es consistente con $u_t + au_x = 0$ con un error de truncamiento $\mathcal{O}((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$ y si aplicamos el análisis de estabilidad de von Neumann en (2.68) hallamos el factor de amplificación

$$\begin{aligned} g &= g^{-1} - C_r(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \\ &= g^{-1} - 2iC_r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.69)$$

multiplicando (2.69) por g obtenemos una ecuación polinomial de segundo grado en la variable g

$$g^2 + iC_r \sin \theta g - 1 = 0 \quad (2.70)$$

cuya solución es

$$g = \pm \sqrt{(1 - C_r^2 \sin^2 \theta)} - iC_r \sin \theta, \quad (2.71)$$

Se nota que si $C_r \leq 1$ la curva se encuentra dentro de la región de estabilidad y si $C_r > 1$ la curva sale de la region de estabilidad, en estas condiciones se dice el que el esquema es *neutralmente estable*.

Considerando que el esquema Leapfrog es un esquema de multipaso es posible realizar un análisis de estabilidad en la siguiente forma.

En el espacio de frecuencias después de aplicar la transformada de Fourier, el esquema Leapfrog es posible escribirlo en la forma:

$$\hat{v}^{n+1} = \hat{v}^{n-1} - C_r (2i \operatorname{sen} \theta) \hat{v}_j^n \quad (2.72)$$

si $A = -2i C_r \operatorname{sen} \theta$, entonces

$$\hat{v}^{n+1} = A \hat{v}_j^n + \hat{v}_j^{n-1} \quad (2.73)$$

Usando la siguiente identidad

$$\hat{v}^n = \hat{v}^n + (0) \hat{v}^{n-1} \quad (2.74)$$

Colocando (2.72) y (2.73) en forma matricial se tiene

$$\begin{pmatrix} \hat{v}^{n+1} \\ \hat{v}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{v}_j^n \\ \hat{v}_j^{n-1} \end{pmatrix}$$

Ahora el factor de amplificación del nuevo sistema es la matriz

$$G = \begin{pmatrix} A & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

Para propósitos de estabilidad, los autovalores de G deben satisfacer la condición $|\lambda| < 1$. Entonces hallamos los autovalores de G utilizando el polinomio característico

$$P(\lambda) = \det(G - \lambda I)$$

de donde se tiene que

$$\lambda^2 - A\lambda - I = 0$$

Aplicando la fórmula cuadrática y reemplazando el valor de A obtenemos los autovalores

$$\lambda_{1,2} = -Cr \operatorname{sen} \theta i \pm \sqrt{1 - C_r^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \quad (2.76)$$

que son los mismos valores encontrados para el factor de amplificación g dado en (2.71).

Vamos a analizar dos casos

Caso 1. Si $1 - C_r^2 \operatorname{sen}^2 \theta \geq 0$ el cual se obtiene para $C_r < 1$. Entonces podemos hallar el módulo al cuadrado de $\lambda_{1,2}$:

$$|\lambda_{1,2}|^2 = 1$$

obteniendo la condición de estabilidad neutral.

Caso 2. Si $1 - C_r^2 \sin^2 \theta < 0$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= -C_r \sin \theta i \pm i \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} \\ &= i(-C_r \sin \theta \pm \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1})\end{aligned}$$

elevando al cuadrado

$$|\lambda_{1,2}|^2 = 2 C_r^2 \sin^2 \theta \pm 2 C_r \sin \theta \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} - 1 \quad (2.77)$$

La condición de estabilidad requiere que

$$|\lambda_{1,2}|^2 \leq 1 \quad (2.78)$$

o lo que es lo mismo

$$C_r^2 \sin^2 \theta \pm C_r \sin \theta \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} < 1 \quad (2.79)$$

cuando usamos el signo + tenemos

$$C_r^2 \sin^2 \theta + C_r \sin \theta \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} < 1 \quad (2.80)$$

lo cual nunca es satisfecho puesto que $C_r^2 \sin^2 \theta > 1$

6.3.1 Ejemplo.-

Aplicando el análisis de estabilidad de un sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} &= 0\end{aligned}$$

Expresando el conjunto de ecuaciones como un vector, obtenemos

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & a_2 \\ b_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, tenemos

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + [A] \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (2.81)$$

Discretizando la ecuación (2.81) por el método de Upwind

$$\frac{\Phi_j^{n+1} - \Phi_j^n}{\Delta t} + [A] \frac{\Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n}{\Delta x} \quad (2.82)$$

Escribiendo en forma de algoritmo

$$\Phi_j^{n+1} = \Phi_j^n - [A] \frac{\Delta t}{\Delta x} (\Phi_j^n - \Phi_{j-1}^n) \quad (2.83)$$

Aplicando el criterio de estabilidad de von Neumann llegamos a

$$G = I - [A] \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{i\theta}) \quad (2.84)$$

Para asegurar la estabilidad se requiere que

$$|\lambda G_{\max}| \leq 1$$

o equivalentemente

$$|\lambda_{\max} \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1$$

donde λ_{\max} es el máximo de los autovalores de la matriz $[A]$ ■

En el esquema Upwind, los autovalores de A se obtienen resolviendo la ecuación $|A - \lambda I| = 0$, llegándose a determinar $\lambda_{1,2} = \sqrt{b_1 a_2}$. Por lo tanto, la condición de estabilidad requiere que

$$|\sqrt{b_1 a_2} \frac{\Delta t}{\Delta x}| \leq 1 \quad (2.85)$$

$$g_{\pm} = -iC_r \sin\theta \pm \sqrt{1 - C_r^2 \sin^2\theta} \quad (2.86)$$

Vamos analizar dos casos

Caso 1. Si $1 - C_r^2 \sin^2\theta \geq 0$ ó $C_r \leq 1$ entonces podemos elevar al cuadrado g_{\pm} y obtenemos

$$|g_{\pm}|^2 = 1$$

Caso 2. Si $1 - C_r^2 \sin^2\theta < 0$, ó $C_r > 1$ entonces

$$\begin{aligned} g_{\pm} &= -C_r \sin\theta i \pm i\sqrt{C_r^2 \sin^2\theta - 1} \\ &= i(-C_r \sin\theta \pm \sqrt{C_r^2 \sin^2\theta - 1}) \end{aligned}$$

elevando al cuadrado

$$|g_{\pm}|^2 = 2C_r^2 \sin^2\theta \pm 2C_r \sin\theta \sqrt{C_r^2 \sin^2\theta - 1} - 1$$

La condición de estabilidad requiere que

$$|g_{\pm}|^2 \leq 1$$

o lo que es lo mismo

$$C_r^2 \sin^2 \theta \pm C_r \sin \theta \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} < 1$$

cuando usamos el signo + tenemos

$$C_r^2 \sin^2 \theta + C_r \sin \theta \sqrt{C_r^2 \sin^2 \theta - 1} < 1 \quad (2.87)$$

lo cual nunca es satisfecho puesto que $C_r^2 \sin^2 \theta > 1$ si $\arcsen(-\pi/2) \leq \theta \leq \arcsen(-1/C_r)$ y $\arcsen(1/C_r) \leq \theta \leq \arcsen(\pi/2)$. Por lo tanto, concluimos que el esquema Leapfrog es inestable para cualquier número de Courant C_r como se observa en la figura (2.13).

Para graficar el factor de amplificación (2.86) podemos parametrizarlo en la forma

$$\begin{cases} x = \pm \sqrt{1 - C_r^2 \sin^2 \theta} \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases}$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Elevando al cuadrado y sumando obtenemos

$$x^2 + y^2 = 1$$

lo cual representa una circunferencia de centro en el origen y radio uno que coincide con el límite de la región de estabilidad como se muestra en la figura (2.12).

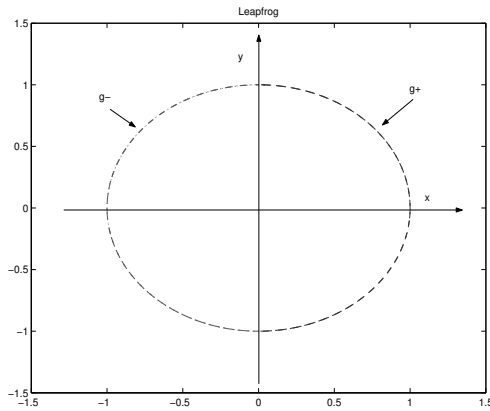


Figura 2.12: *Leapfrog*, $C_r \leq 1$

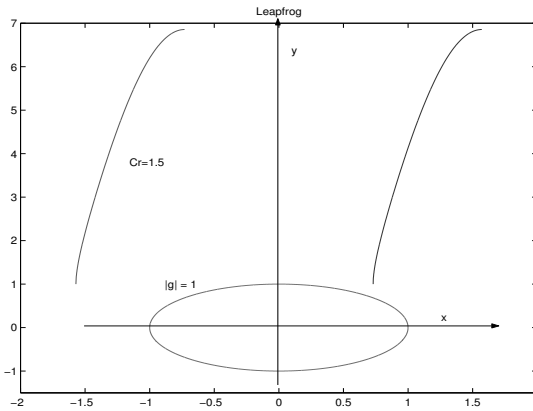


Figura 2.13: *Leapfrog*, $C_r > 1$

6.4. Esquema Lax-Wendroff

El esquema Lax-Wendroff es un algoritmo muy popular para resolver ecuaciones que gobiernan flujos compresibles no viscosos.

Una representación en diferencias finitas para la ecuación de convección $u_t + au_x = 0$ es derivada del desarrollo de la serie de Taylor de la variable dependiente como sigue

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathcal{O}(\Delta t)^3$$

Ahora considere la ecuación modelo $u_t + au_x = 0$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$$

Tomando la derivada en el tiempo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

sustituyendo en u_j^{n+1} tenemos

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(-a \frac{\partial u}{\partial x}\right) \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \mathcal{O}(\Delta t)^3$$

Usando diferencias centrales de segundo orden para la derivada espacial

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - a \Delta t \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2 \Delta x} \right) + \frac{1}{2} a^2 (\Delta t)^2 \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \right) \\ &+ \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \end{aligned}$$

lo cual se puede expresar en la variable v en el nodo (j, n)

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2 \Delta x} - a^2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (2.88)$$

Esta formulación es conocida como el esquema Lax-Wendroff en su versión explícita, el cual se puede escribir en función del número de Courant Cr como

$$v_j^{n+1} = v_j^n - 0.5Cr(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + 0.5Cr^2(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n). \quad (2.89)$$

Haciendo el análisis de consistencia al esquema Lax Wendroff se llega a determinar que tiene un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$.

Para analizar la estabilidad del esquema aplicamos el análisis de von Neumann a la ecuación (2.89)

$$\begin{aligned} g &= 1 - 0.5Cr(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + 0.5Cr^2(e^{i\theta} + e^{-i\theta} - 2) \\ &= 1 - iCr \sin \theta + Cr^2(\cos \theta - 1) \\ &= 1 - iCr \sin \theta - 2Cr^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

Así tenemos el factor de amplificación

$$g = 1 - 2Cr^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} - iCr \sin \theta \quad (2.90)$$

cuyo módulo está dado por

$$|g|^2 = 1 + 4Cr^4 (Cr^2 - 1) \sin^4 \frac{\theta}{2} \quad (2.91)$$

Por lo tanto $|g|^2 \leq 1$ si $Cr \leq 1$.

Para visualizar el comportamiento del factor de amplificación (2.90) lo parametrizamos en la forma

$$\begin{cases} x = 1 - 2Cr^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ y = -Cr \sin \theta \end{cases}$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$

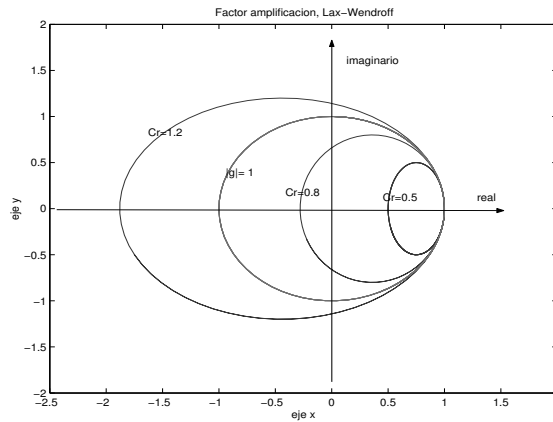


Figura 2.14: *Factor Lax-Wendroff*

6.5. Esquema Lax-Friedrichs

El esquema Lax-Friedrichs puede ser escrito como

$$\frac{v_j^{n+1} - 0.5(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = 0 \quad (2.92)$$

y en forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = 0.5(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) - 0.5Cr(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n). \quad (2.93)$$

Haciendo un análisis de consistencia se demuestra que el esquema (2.93) es consistente con $u_t + au_x = 0$ con un orden de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Aplicando el análisis de estabilidad de von Neumann a (2.93) se llega a determinar el factor de amplificación

$$g = \cos \theta - i C_r \sin \theta \quad (2.94)$$

tal que $|g|^2 = \cos^2 \theta + C_r^2 \sin^2 \theta < 1$ si $C_r \leq 1$.

Para visualizar los valores de (2.94) lo expresamos en forma paramétrica como

$$\begin{cases} x = \cos \theta \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases}$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, cuya gráfica se muestra en la figura (2.15) para los números de Courant $C_r = 0.5, 0.8$ y 1.5

2.7. Esquemas implícitos

7.1. Esquema BTCS

Presentamos un esquema implícito para la ecuación de convección $u_t + au_x = 0$.

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} = 0 \quad (2.95)$$

el cual como algoritmo se puede escribir

$$a C_r v_{j-1}^{n+1} + v_j^{n+1} - a C_r v_{j+1}^{n+1} = v_j^n \quad (2.96)$$

Haciendo un análisis de consistencia puntual llegamos a determinar

$$L\phi|_j^n - L_j^n \phi \rightarrow 0, \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (2.97)$$

con un orden de precisión $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$.

Aplicamos el análisis de estabilidad de von Neumann para determinar el factor de amplificación y establecer condiciones necesarias para la estabilidad. Esto es

$$1 = g^{-1} + \frac{1}{2} C_r (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \quad (2.98)$$

obteniendo el factor de amplificación

$$g = \frac{1}{1 - i C_r \sin \theta} \quad (2.99)$$

donde

$$|g|^2 = \frac{1}{1 + C_r^2 \sin^2 \theta} \quad (2.100)$$

Así que la condición de estabilidad $|g|^2 \leq 1$ se cumple para todo número de Courant C_r .

7.2. Esquema Crank-Nicolson

El esquema Crank-Nicolson es muy efectivo cuando lo aplicamos a la ecuación de difusión unidimensional. En esta sección daremos el esquema Crank-Nicolson para la ecuación de convección $u_t + au_x = 0$.

El esquema de diferencias finitas Crank-Nicolson puede ser escrito

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a(0.5L_x v_j^n + 0.5L_x v_j^{n+1}) = 0 \quad (2.101)$$

donde $L_x v_j = (v_{j+1} - v_{j-1})/(2\Delta x)$. La ecuación (2.101) produce el siguiente algoritmo tridiagonal

$$-0.25C_r v_{j-1}^{n+1} + v_j^{n+1} + 0.25C_r v_{j+1}^{n+1} = 0.25C_r v_{j-1}^n + v_j^n - 0.25C_r v_{j+1}^n \quad (2.102)$$

el cual puede ser solucionado eficientemente usando eliminación gaussiana y descomposición LU.

El esquema de Crank-Nicolson (2.102) es consistente con $u_t + au_x = 0$ con un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$.

Ahora aplicamos el análisis de estabilidad de von Neumann a (2.102)

$$\begin{aligned} 0.25C_r g(-e^{-i\theta} + e^{i\theta}) + g &= 0.25C_r (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) + 1 \\ 0.25gC_r(2i\sin\theta) + g &= 1 - 0.25C_r(2i\sin\theta) \\ g(i0.5C_r\sin\theta + 1) &= 1 - i0.5C_r\sin\theta \end{aligned}$$

entonces, el factor de amplificación es

$$g = \frac{1 - i0.5C_r\sin\theta}{1 + i0.5C_r\sin\theta} \quad (2.103)$$

Si hacemos $A = 0.5C_r\sin\theta$, tenemos

$$\begin{aligned} g &= \frac{1 - iA}{1 + iA} \\ &= \frac{1 - A^2}{1 + A^2} + i\frac{-2A}{1 + A^2} \end{aligned}$$

Entonces, el módulo de g es

$$\begin{aligned} |g|^2 &= \left(\frac{1 - A^2}{1 + A^2}\right)^2 + \left(\frac{-2A}{1 + A^2}\right)^2 \\ &= \frac{1 + 2A^2 + A^4}{(1 + A^2)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el esquema de Crank-Nicolson es *incondicionalmente estable* y por el teorema de Lax es convergente de orden $(\mathcal{O}(\Delta t)^2, \mathcal{O}(\Delta x)^2)$.

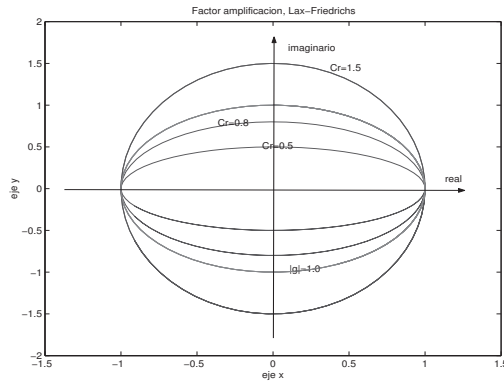


Figura 2.15: Factor Lax-Friedrichs

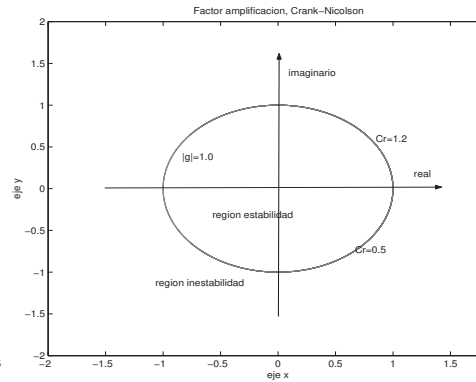


Figura 2.16: Factor Crank-Nicolson

La figura (2.16) muestra los valores del factor de amplificación para $Cr = 1.0$ en la que se observa que todos los valores son iguales a 1. Resultados similares se obtienen para diferentes números de Courant mayores o menores que uno.

La importancia de los conceptos de consistencia y estabilidad se ven en el teorema de equivalencia de Lax-Richtmyer, el cual es el teorema fundamental en la teoría de esquemas de diferencias finitas para problemas de valor inicial.

Teorema 2

Un esquema de diferencias finitas consiste en una ecuación diferencial parcial para el cual el problema de valor inicial es bien puesto es convergente si y solo si es estable.

2.8. Resultados numéricos

En esta sección presentamos los esquemas de diferencias finitas para el problema de convección unidimensional analizado en su estabilidad y consistencia en la sección anterior. De igual forma al problema de difusión hacemos un estudio comparativo de los esquemas, resolviendo el mismo problema bajo condiciones similares y dependencia de los parámetros.

8.0.1 Ejemplo.-

Consideremos el problema siguiente

$$u_t + au_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad 0.05 \leq x \leq 0.15 \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar.} \end{cases}$$

cuya solución exacta está dada por

$$u(x, t) = f(x - at) \tag{2.104}$$

donde la constante a será igual a 1. El rango para la variable x será $-1 < x < 2$ y el espaciamiento en la malla para la variable x es $\Delta x = 0.01$.

Las figuras (2.17), (2.18), (2.19) y (2.20) describen los resultados para los pasos $n = 50, 100$ y 150 , y para $C_r = 0.5$ para los esquemas Lax-Wendroff, Upwind, Leapfrog, Lax-Friedrichs, donde las soluciones aproximadas son representadas por líneas punteadas y la solución exacta es representada por líneas continuas. En la figura (2.17) se muestra que el esquema de segundo orden dispersivo Lax-Wendroff tiene oscilaciones cerca de las discontinuidades, pero no se propagan inmediatamente. En la figura (2.18) se muestra el esquema de primer orden disipativo Upwind, donde la curva de aproximación se ajusta más a la curva exacta, no presenta oscilaciones de ningún tipo, cerca de las discontinuidades se separa mucho de la solución exacta. En la Figura (2.19) se muestra que el esquema de segundo orden dispersivo tiene oscilaciones cerca de las discontinuidades que se propagan muy rápido en los primeros niveles de tiempo.

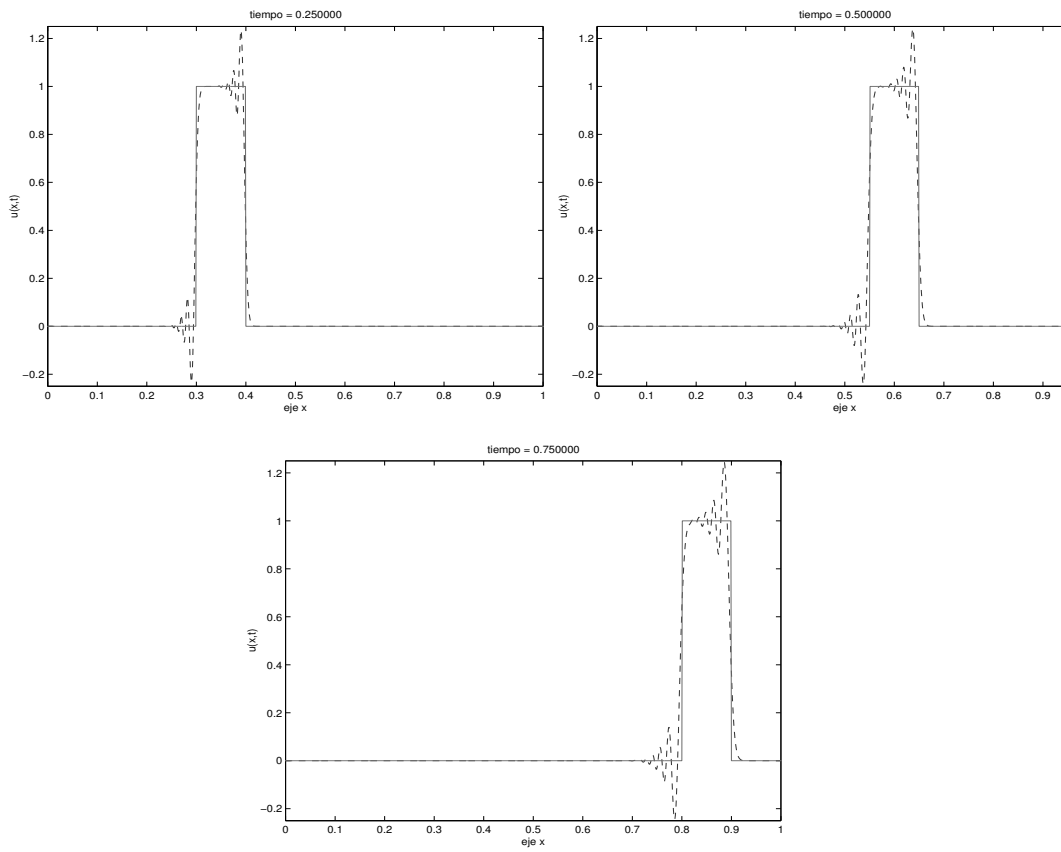


Figura 2.17: Esquema Lax-Wendroff, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

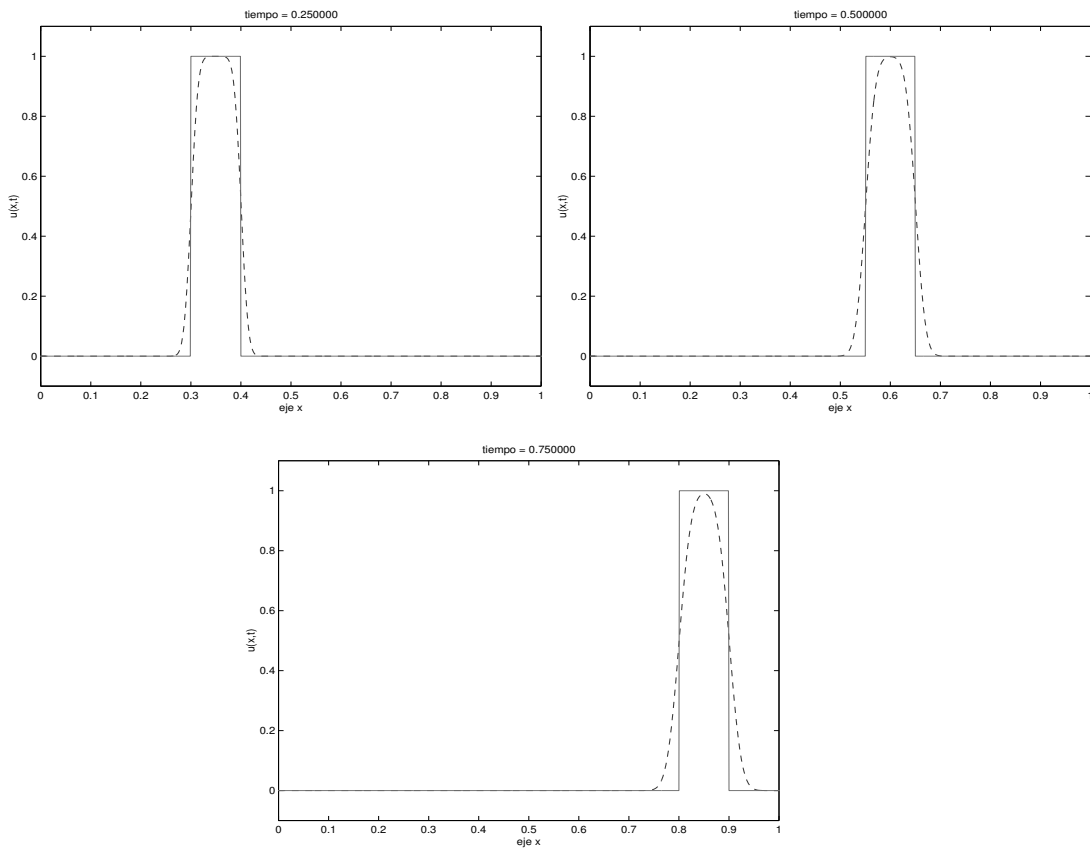


Figura 2.18: *Esquema Upwind*, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

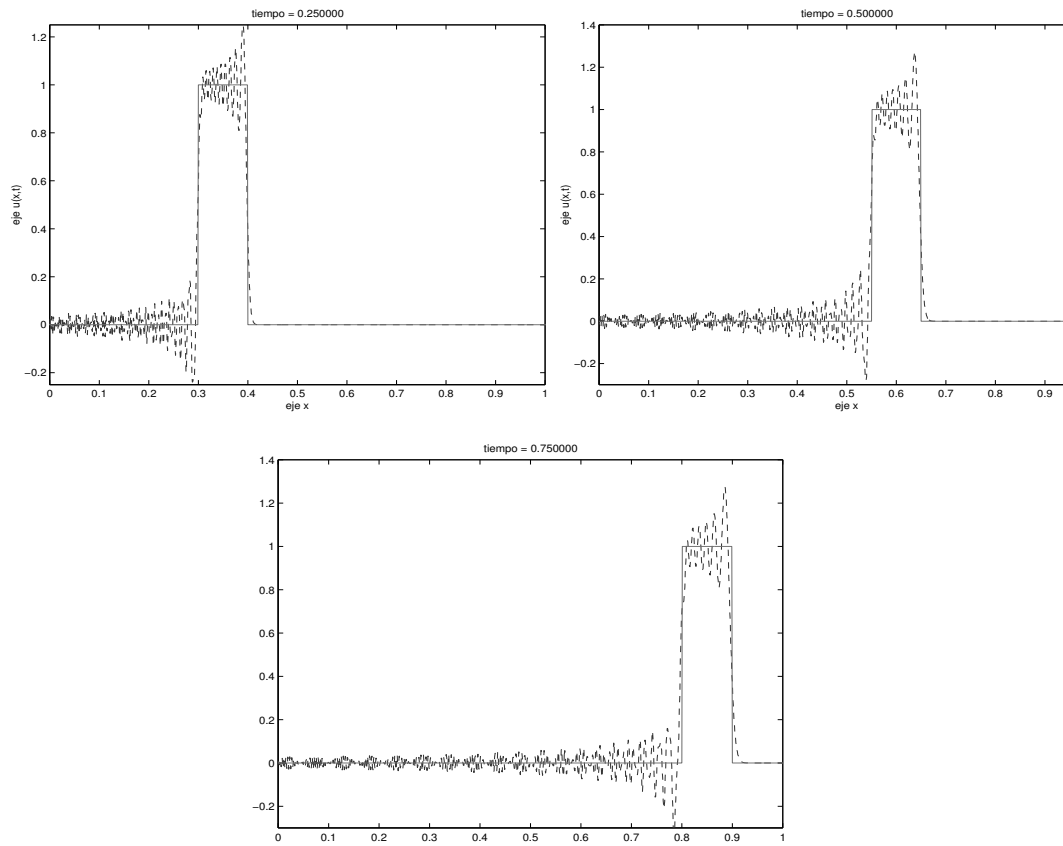


Figura 2.19: Esquema Leapfrog, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

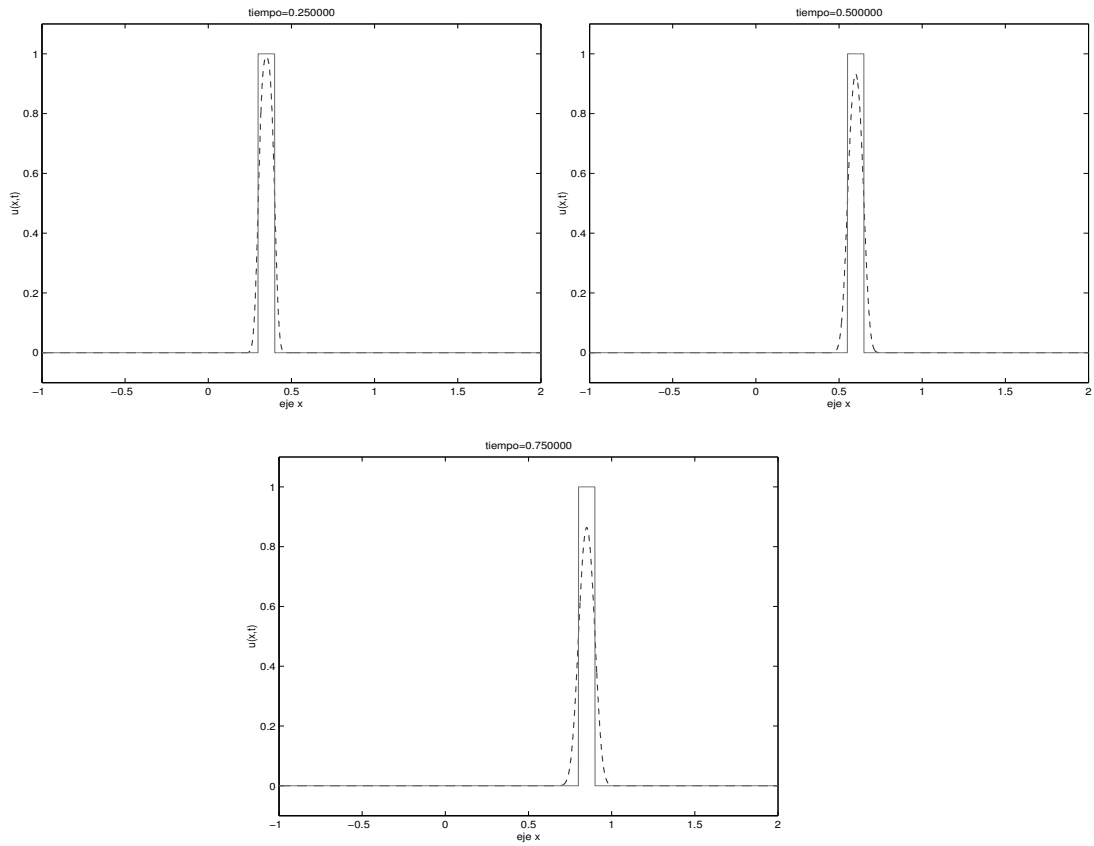


Figura 2.20: Esquema Lax-Friedrichs, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

8.0.2 Ejemplo.-

Consideremos la propagación de una onda sinusoidal. Así $u_t + au_x = 0$ es resuelta sujeta condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin(10\pi x) & , \quad 0 \leq x \leq 0.1 \\ 0 & , \quad 0.1 < x \leq 1.0 \end{cases}$$

con condiciones de frontera

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0.$$

La solución exacta está dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x \leq at \\ \sin(10\pi(x - at)) & , \quad at \leq x \leq at + 0.1 \\ 0 & , \quad at + 0.1 \leq x \leq 1.0 \end{cases}$$

Para un valor $a = 0.1$ la solución exacta en $t = 0$ y $t = 8$ son mostradas en la figura (2.21). La onda sinusoidal se propaga sin reducir su amplitud a una velocidad $a = 0.1$.

Soluciones computacionales fueron obtenidas con $N = 40$ para x en el intervalo $0 \leq x \leq 1.0$ y con un número de Courant $Cr = 0.8$. Utilizamos los esquemas de primer orden disipativo Upwind: figura (2.21), el esquema dispersivo de segundo orden explícito Lax-Wendroff: (2.22), el esquema Lax-Friedrichs: (2.23) y el esquema FTCS: (2.24). La solución computacional es suave, pero comparada con la solución exacta tiene un “ablandamiento” (o difusividad), este es consistente con la introducción del término de viscosidad artificial.

La solución para el problema de Lax-Wendroff (2.88) es mostrada en la figura (2.22) para los valores de $t = 8.0$ y $Cr = 0.8$.

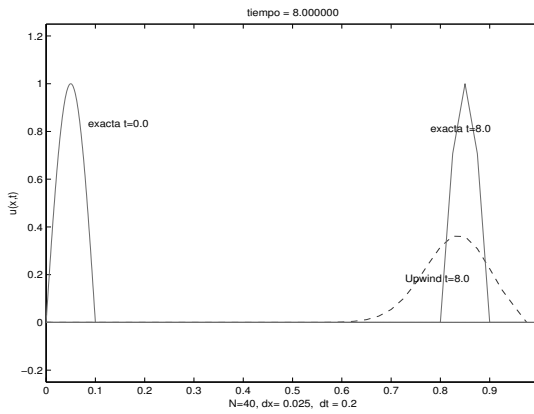


Figura 2.21: *Upwind*, $Cr = 0.8$

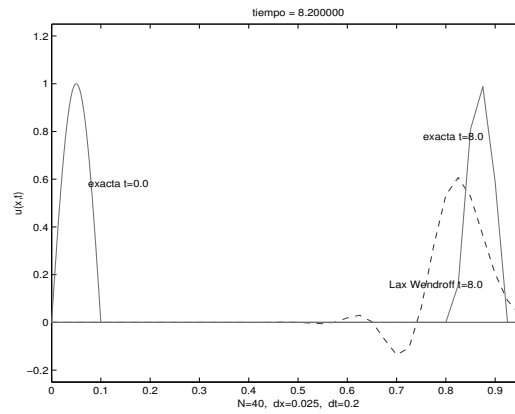
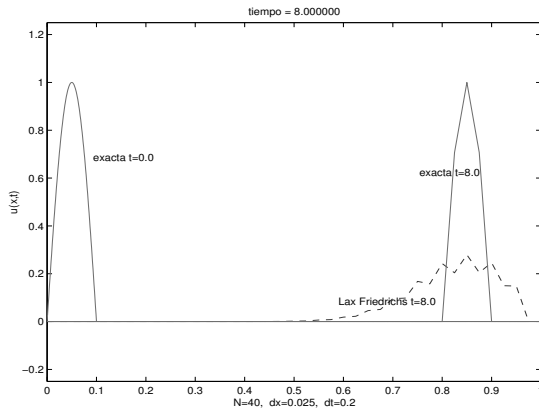
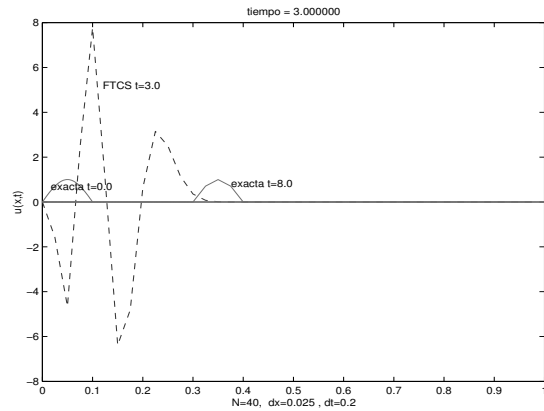


Figura 2.22: *Lax-Wendroff*, $Cr = 0.8$

Figura 2.23: *Lax-Friedrichs*, $C_r = 0.8$ Figura 2.24: *FTCS*, $C_r = 0.8$

8.0.3 Ejemplo.-

Cambiamos la condición inicial para la $u_t + au_x = 0$ por

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & , \quad -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & , \quad 0 < x \leq 2.0 \end{cases}$$

Tenemos los siguientes resultados en las figuras (2.25), (2.26) y (2.27). En la figura (2.25) se muestra que el esquema Upwind en la discontinuidad se aleja de la solución exacta en forma suave. En la Figura (2.26) el esquema Lax-Wendroff presenta oscilaciones en la discontinuidad que se propagan en forma lenta a medida que pasa el tiempo.

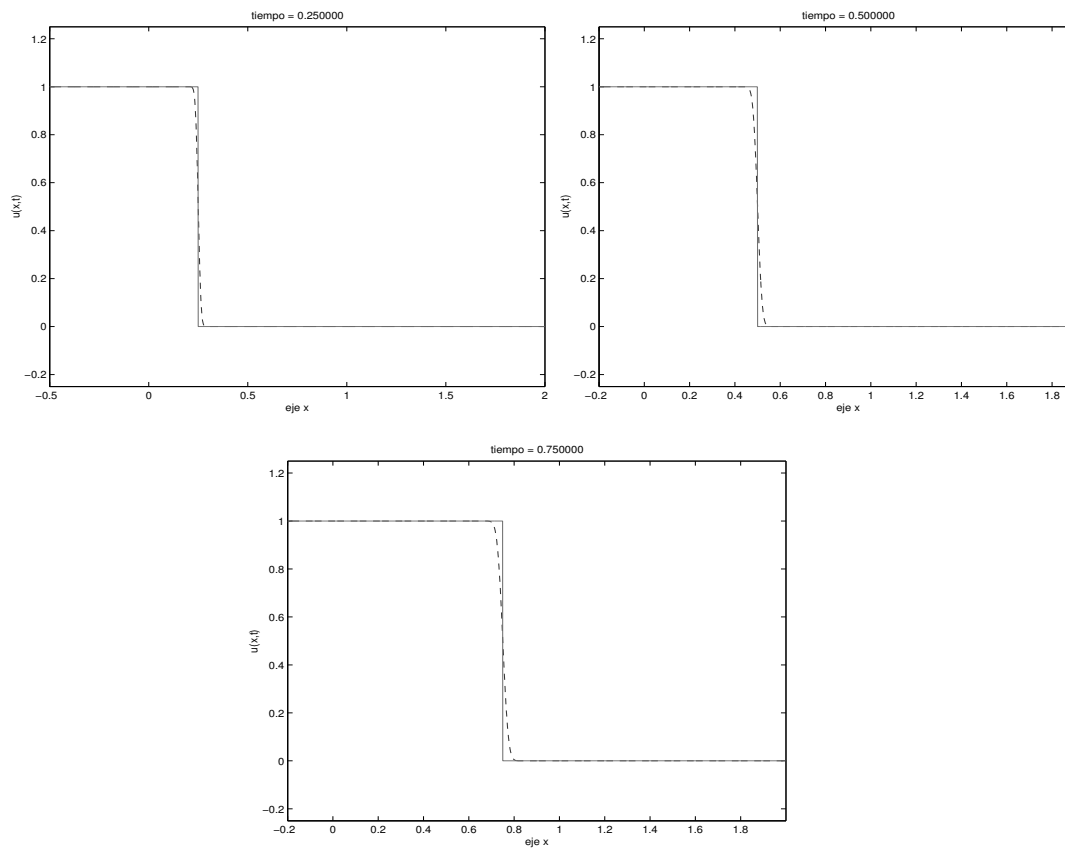


Figura 2.25: *Upwind*, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

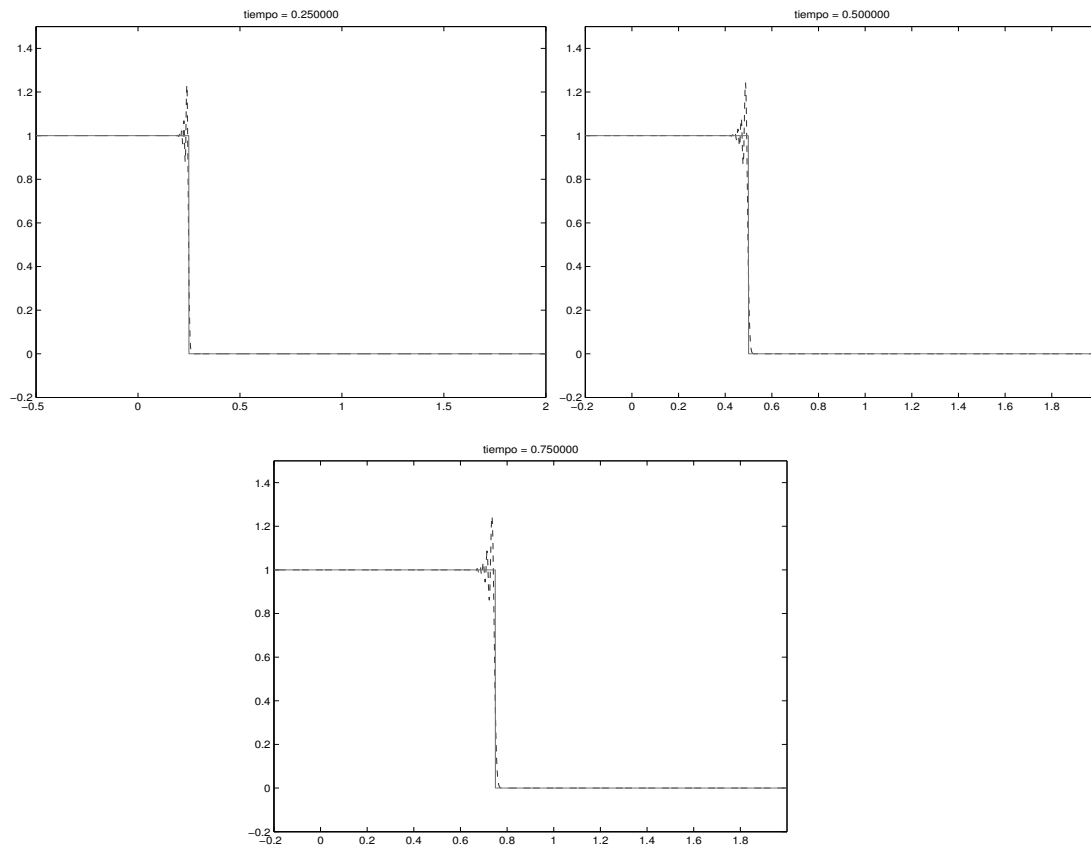


Figura 2.26: *Lax-Wendroff*, $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

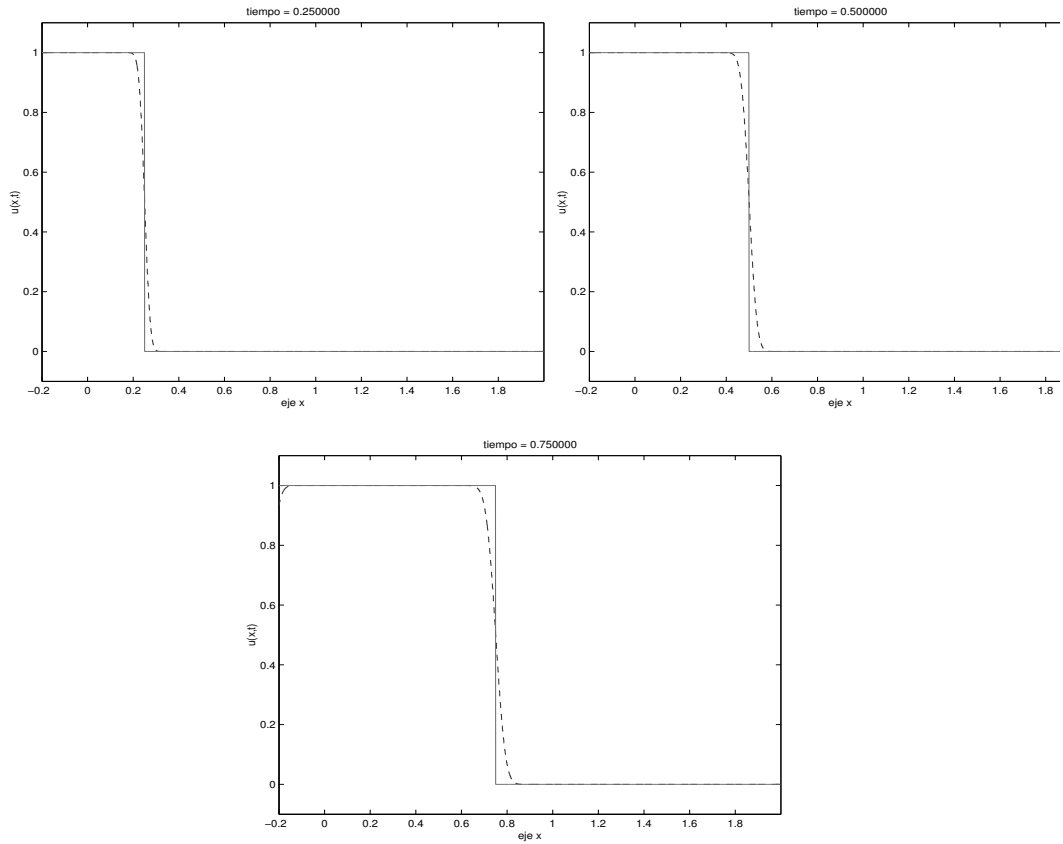


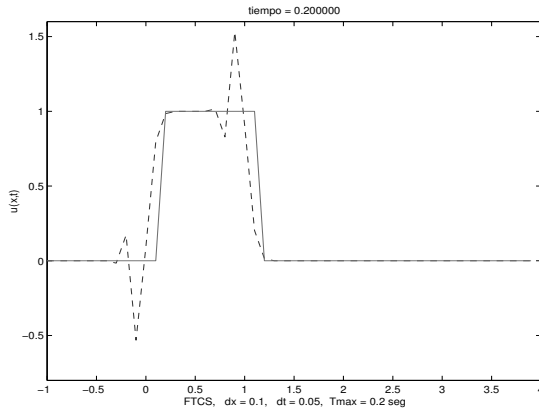
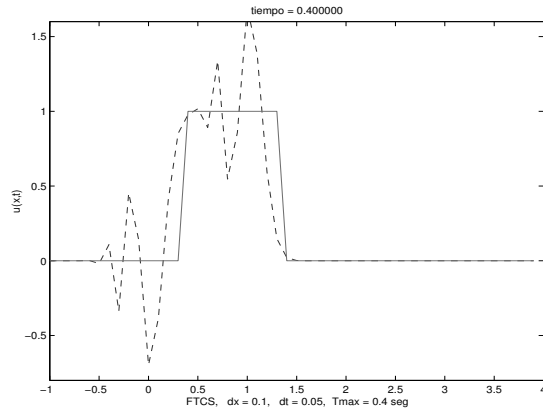
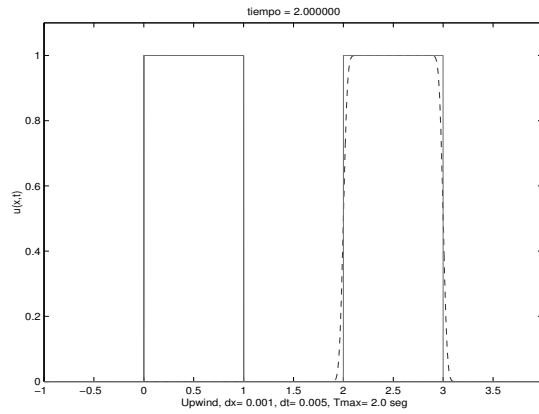
Figura 2.27: Lax-Friedrichs $C_r = 0.5$, $n=50, 100, 150$

8.0.4 Ejemplo.-

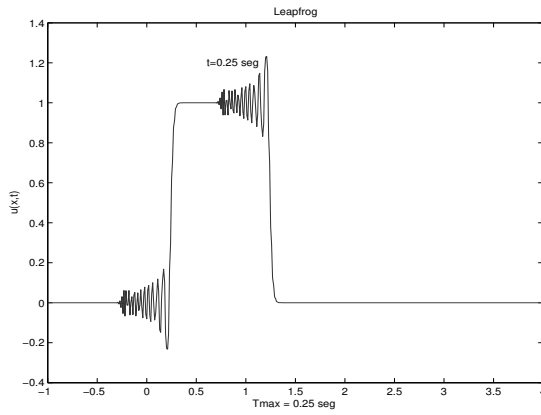
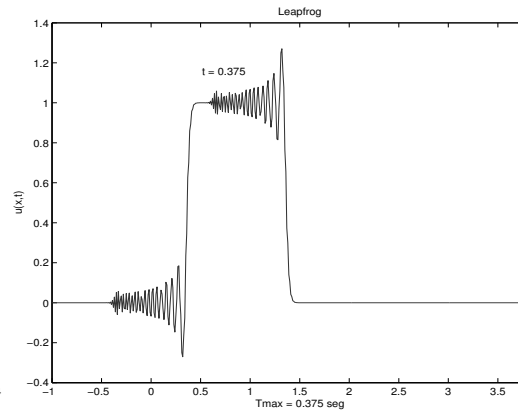
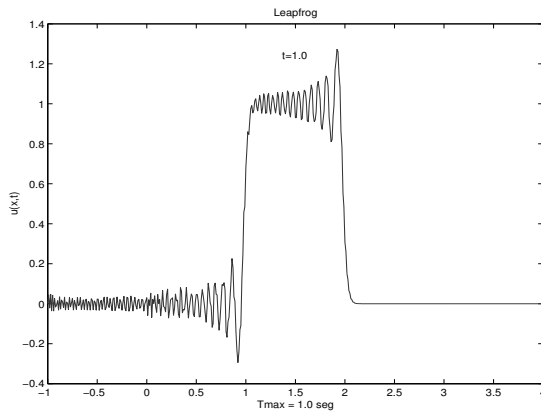
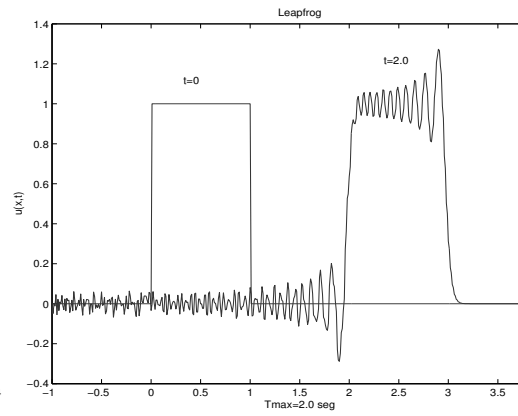
Sea el problema

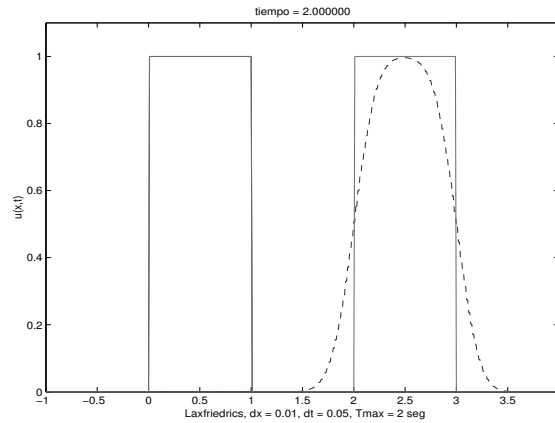
$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{otro lugar} \end{cases} \quad (2.105)$$

En la figura (2.28) se muestra la solución aproximada del problema anterior para los valores $Cr = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $dx = 0.1$, $dt = 0.005$ para un tiempo máximo de $T_{max} = 0.2 \text{ seg}$. En la figura (2.29) se muestra la solución aproximada de (2.105) para un tiempo $T_{max} = 0.4 \text{ seg}$. En ambas figuras se muestra la inestabilidad del esquema FTCS. En la figura (2.30) mostramos la solución aproximada obtenida por el esquema Upwind para $Cr = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $dx = 0.01$, $dt = 0.005$ para un tiempo máximo $T_{max} = 2.0 \text{ seg}$

Figura 2.28: Convección FTCS, $T_{max}=0.2$ Figura 2.29: Convección FTCS, $T_{max}=0.4$ Figura 2.30: Upwind, $C_r = 0.5$, $\alpha = 1.0$, $dx = 0.01$, $T_{max} = 2.0 \text{ seg}$

En las figuras (2.31), (2.32), (2.33) y (2.34) se muestra la solución aproximada del problema (2.105) para $C_r = 0.5$, $dx = 0.01$, $dt = 0.005$ en los tiempos $t = 0.25$, 0.375 , 1.0 y 2.0 seg , respectivamente.

Figura 2.31: *Leapfrog*, $T_{max} = 0.25 \text{ seg}$ Figura 2.32: *Leapfrog*, $T_{max} = 0.375 \text{ seg}$ Figura 2.33: *Leapfrog*, $T_{max} = 1.0 \text{ seg}$ Figura 2.34: *Leapfrog*, $T_{max} = 2.0 \text{ seg}$

Figura 2.35: *Lax Friedrichs*, $C_r = 0.5$ **8.0.5 Ejemplo.-**

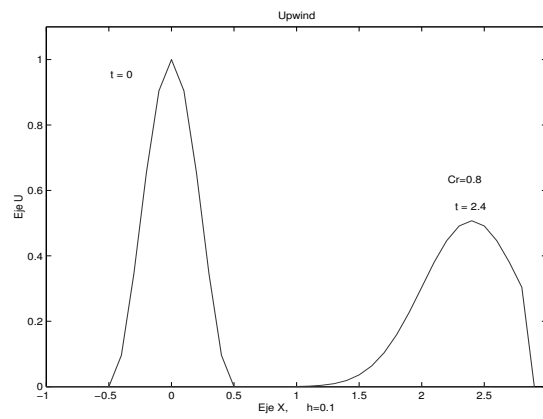
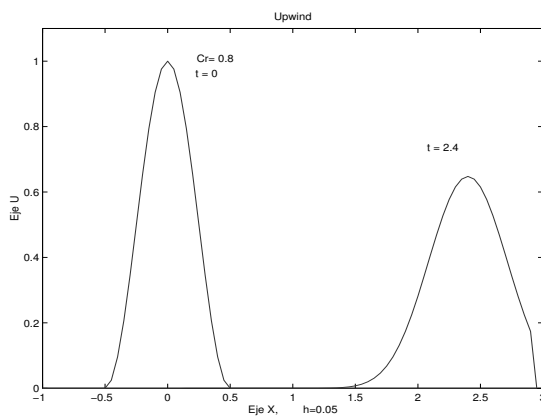
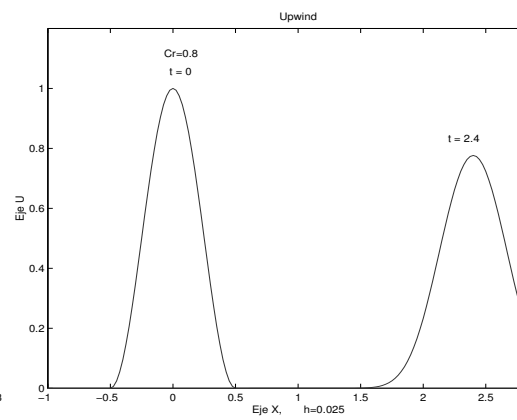
Para afianzar nuestros resultados vamos a considerar otro ejemplo sobre el transporte de una onda cosenoidal. Para ello consideremos valores de x en $[-1,3]$ y t en $[0,2.4]$, el espaciamiento en la malla para la variable x será de $\Delta x = 0.1, 0.05$ y 0.025 para un tiempo máximo de $T_{\max} = 2.4$ y $a = 1$

$$u_t + au_x = 0, \quad (2.106)$$

con condiciones iniciales

$$u(x,0) = \begin{cases} \cos^2 \pi x & , \quad |x| \leq 0.5 \\ 0 & , \quad \text{en otro lugar.} \end{cases} \quad (2.107)$$

y $u(-1,t) = 0$.

Figura 2.36: *Upwind*, $h=0.1$ Figura 2.37: *Upwind*, $h=0.05$ Figura 2.38: *Upwind*, $h=0.025$

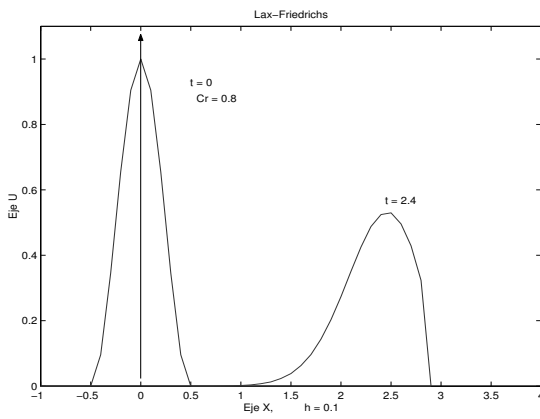


Figura 2.39: *Lax Friedrichs*, $h=0.1$

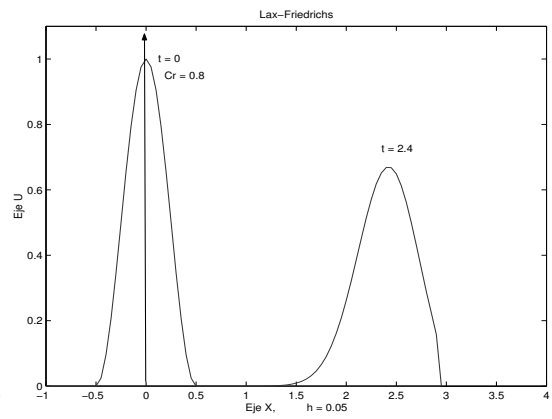


Figura 2.40: *Lax Friedrichs*, $h=0.05$

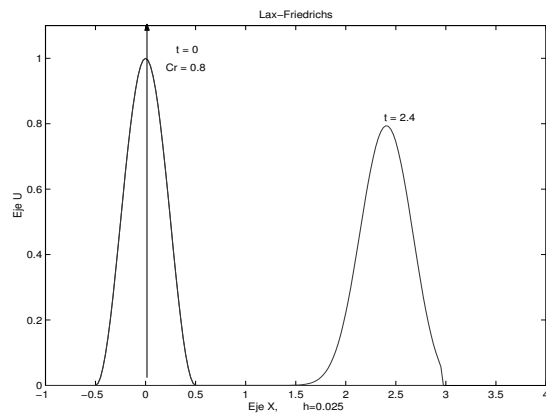
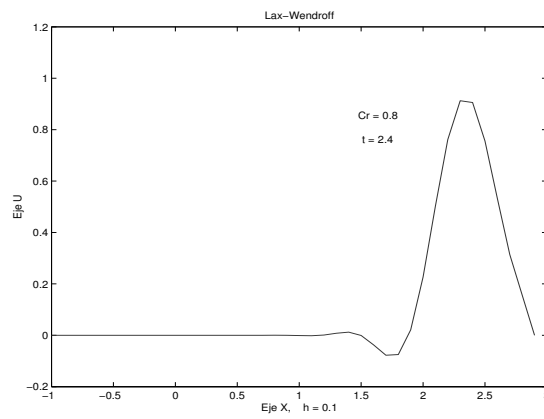
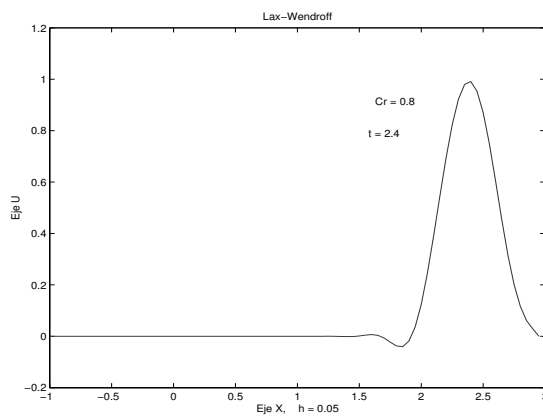
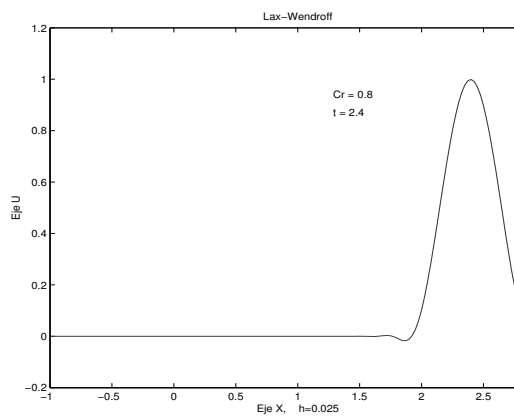


Figura 2.41: *Lax Friedrichs*, $Cr=0.8$, $h=0.025$

Figura 2.42: *Lax Wendroff*, $h=0.1$ Figura 2.43: *Lax Wendroff*, $h=0.05$ Figura 2.44: *Lax Wendroff*, $h=0.025$

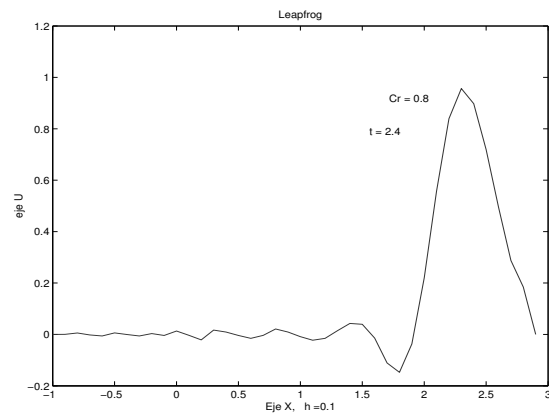


Figura 2.45: *Leapfrog*, $h=0.1$

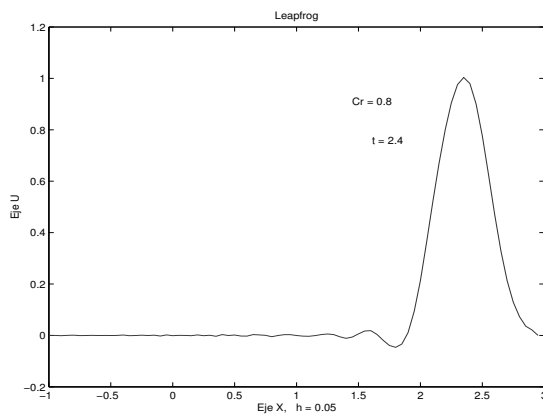


Figura 2.46: *Leapfrog*, $h=0.05$

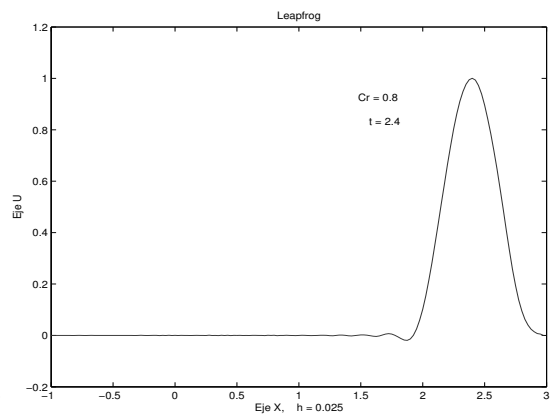


Figura 2.47: *Leapfrog*, $h=0.025$

CAPÍTULO 3

MÉTODO DE DIFERENCIAS PARA ECUACIONES PARABÓLICAS

En este capítulo la ecuación de difusión unidimensional será usada como un vehículo para desarrollar esquemas de diferencias finitas explícitas e implícitas. Centraremos nuestra atención en la estabilidad y consistencia de varios esquemas tanto explícitos como implícitos.

La forma canónica de la ecuación parabólica de difusión unidimensional o ecuación del calor está dada por

$$\frac{\partial U}{\partial T} = K \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}, \quad 0 < X < L, \quad T > 0 \quad (3.1)$$

donde K es la constante de difusividad.

Para determinar la ecuación adimensional de (3.1) tomamos U_0 como algún valor particular de U (tal como el valor máximo o mínimo en $t = 0$), entonces

$$x = \frac{X}{L}, \quad u = \frac{U}{U_0}, \quad t = \frac{T}{T_0} \quad (3.2)$$

(T_0 es elegido), entonces

$$\frac{\partial U}{\partial T} = \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.3)$$

puesto que

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial T} &= \frac{\partial U}{\partial t} \frac{dt}{dT} = \frac{\partial(U_0 u)}{\partial t} \frac{1}{T_0} \\ &= \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

y

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = \frac{U_0}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.4)$$

Reemplazando en la ecuación parabólica

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{T_0} \frac{\partial u}{\partial t} &= K \frac{U_0}{L^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ \frac{L^2}{KT_0} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Por consiguiente si elegimos

$$T_0 = \frac{L^2}{K}$$

la ecuación es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1. \quad (3.5)$$

Esta ecuación adimensional puede ser usada para tipificar diversos procesos numéricos y se puede deducir siguiendo las leyes físicas siguientes

1. La cantidad de calor necesario para elevar la temperatura de un objeto de masa m en una cantidad Δu es $ms\Delta u$, donde s es una constante que depende del material usado llamada *calor específico*
2. La cantidad de calor que fluye a través de una área por unidad de tiempo y proporcional a la tasa de cambio de la temperatura con respecto a la distancia perpendicular al área (normal)

$$\mathbf{Q} = -kA \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.6)$$

donde \mathbf{Q} cantidad de calor que fluye a la derecha, Δt longitud del tiempo durante el cual ocurre el flujo, k es la constante de proporcionalidad llamada *conductividad térmica* que depende del material usado y A es una sección de área.

El **principio de conservación de la energía** que establece que para una región R de un sólido

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{La cantidad de calor} \\ \text{consumida dentro de la región } R \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{A la cantidad de calor que entra} \\ \text{por las fronteras de la región } R \end{array} \right\}$$

La ley de conductividad térmica de cuerpos sólidos, conocida como la **Ley de Fourier**, establece que el flujo de calor a través de una superficie S es proporcional a la derivada normal de la temperatura sobre la superficie. La constante de proporcionalidad

que denotaremos como k es llamada la *Conductividad Térmica*. Si denotamos por q la cantidad de calor que fluye por unidad de tiempo, y por u la temperatura, obtenemos

$$q = -k \frac{\partial u}{\partial v} = -k \nabla u \cdot v \quad (1)$$

v es la normal a la superficie S

La **Ley de Newton** establece que la cantidad de calor que fluye durante una unidad de tiempo a través del área σ de la superficie del cuerpo al medio ambiente es proporcional a la diferencia de temperatura del cuerpo con el medio ambiente. Esto es

$$Q = -\sigma \alpha (u - u_0) \quad (2)$$

donde σ es el área de la superficie, α es el coeficiente de intercambio de calor.

Otro coeficiente térmico conocido es la *capacidad térmica* c_0 , que se define como cantidad de calor necesaria para elevar una unidad de volumen a una unidad de temperatura. Así pues si conocemos el aumento de temperatura de un cuerpo y la capacidad térmica del material, podremos conocer la cantidad de calor que fue introducida al material. Asumiremos en este contexto que todos los coeficientes de proporcionalidad son constantes.

Hay que observar que si $Q > 0$, el flujo va a la derecha, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ esto es la temperatura va decreciendo a medida que vamos a la derecha.

La cantidad de calor que fluye de izquierda a derecha a través de los planos **B** y **C** son

$$Q_B = -kA \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \text{ en } x \quad (3.7)$$

y

$$Q_C = -kA \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \text{ en } x + \Delta x \quad (3.8)$$

Entonces la cantidad de calor acumulada en el volumen entre los planos **B** y **C** es la cantidad que entra por **B** menos la que sale por **C**

$$\begin{aligned} Q_B - Q_C &= \left\{ -kA \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_x - \left\{ -kA \Delta t \frac{\partial u}{\partial x} \right\}_{x+\Delta x} \\ &= kA \Delta t \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right\} \end{aligned}$$

Podemos decir que la ecuación anterior representa la cantidad de calor acumulado que eleva o baja la temperatura del elemento de volumen si es positivo o negativo.

Por la Ley 1 tenemos que

$$\begin{aligned} kA \Delta t \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_x \right\} &= ms \Delta u \\ &= \rho A \Delta x s \Delta u \end{aligned}$$

donde ρ es la densidad y s es el calor específico.

Dividiendo entre $A \Delta x \Delta t$

$$k \frac{\frac{\partial u}{\partial x}|_{x+\Delta x} - \frac{\partial u}{\partial x}|_x}{\Delta x} = \rho s \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (3.9)$$

y haciendo $\Delta x, \Delta t$ tiendan a cero

$$k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho s \frac{\partial u}{\partial t} \quad (3.10)$$

o

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

donde $\kappa = \frac{k}{\rho s}$

En la ecuación (3.1) la variable u se interpreta como la velocidad o temperatura. Si u es la temperatura, la ecuación (3.1) gobierna el flujo de calor en una barra aislada salvo en sus extremos donde puede transferir calor al medio circundante vía los puntos extremos.

En los extremos podemos tener condiciones de frontera de Dirichlet o de Neumann como puede verse en la figura 3.1).

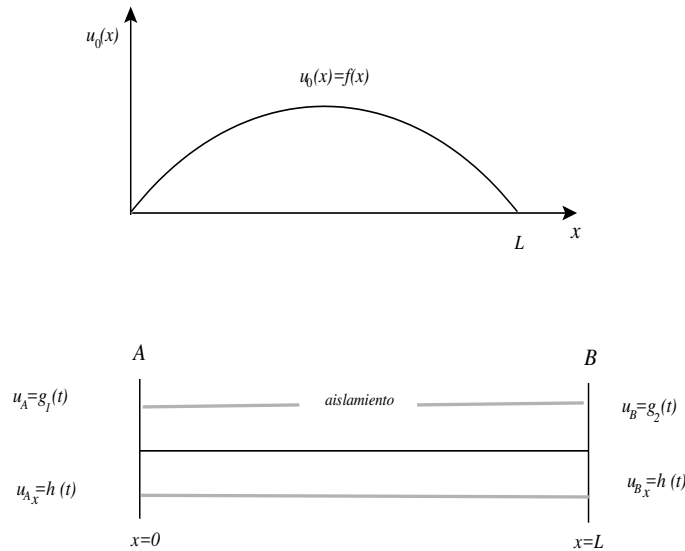


Figura 3.1: Ecuación unidimensional de difusión.

Para obtener soluciones únicas de (3.1) también es necesario especificar las condiciones iniciales. Estas están dadas por $u(x, 0) = u_0(x)$ para un tiempo $t = 0$.

La solución exacta de (3.1) satisface las condiciones de frontera (Dirichlet, Neumann o mixtas). En unión con las condiciones iniciales ($t = 0$) pueden ser obtenidas por el método de Fourier [10],[16], [17].

3.1. Ecuación del difusión

Construyamos la solución exacta de la ecuación del calor utilizando el método de Fourier. Para ello comenzaremos estudiando un caso particular, tomando las condiciones de contorno homogéneas, es decir $u(x, 0) = u_0$ y por simplicidad consideramos $L = 1$. La solución particular la obtenemos por separación de variables. En efecto, sea

$$u(x, t) = T(t)X(x) \quad (3.12)$$

sustituyendo este valor en (3.1) tenemos

$$T_t(t)X(x) - T(t)X_{xx}(x) = 0 \quad (3.13)$$

Así se obtiene

$$\frac{T_t(t)}{T(t)} = \frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = \lambda \quad (3.14)$$

donde λ es una constante, independiente de x y de t . De la ecuación (3.14) anterior y de las condiciones de contorno concluimos que w debe satisfacer

$$T_t(t) + \lambda T(t) = 0 \quad (3.15)$$

$$X_{xx} = \lambda X \quad (3.16)$$

$$X(0) = X(1) = 0$$

De donde concluimos que $X = \sin(\sqrt{\lambda}x)$ y de las condiciones de contorno obtenemos que $\lambda = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$. Así

$$X(x) = \sin(k\pi x) \quad T(t) = T(0)e^{-k^2\pi^2 t} \quad (3.17)$$

Por tanto, una solución particular de la ecuación del calor es de la forma

$$u(x, t) = T(0)\sin(k\pi x)e^{-k^2\pi^2 t} \quad (3.18)$$

Observe que ella satisface la ecuación (3.1). Utilizando la condición de contorno y la condición inicial se tiene

$$u(x, 0) = T(0)\sin(k\pi x) \quad (3.19)$$

Como $T(0)$ puede tomar cualquier valor, podemos asumir que depende también de k , por tanto las soluciones particulares están dadas por

$$u_k(x, 0) = T_k(0) \operatorname{sen}(k\pi x) \quad (3.20)$$

Como la ecuación (3.1) es lineal tendremos que las combinaciones lineales de las soluciones particulares (3.20) también satisfacen la ecuación (3.1) y las condiciones de contorno. Denotando por

$$u^m = \sum_{k=1}^m T_k(0) e^{-k^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x) \quad (3.21)$$

Vemos que la condición inicial satisfecha por esta función es

$$u^m(x, 0) = \sum_{k=1}^m T_k(0) \operatorname{sen}(k\pi x) \quad (3.22)$$

Se prueba el análisis que toda función $C^1(0, 1)$ que se anula en los extremos puede ser expresada como una serie de Fourier de la forma

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \operatorname{sen}(k\pi x), \quad c_k = \int_0^1 u_0(x) \operatorname{sen}(k\pi x) dx \quad (3.23)$$

Por tanto, un candidato a solución de la ecuación del calor es

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 \pi^2 t} \operatorname{sen}(k\pi x) \quad (3)$$

con el valor de $c_k = T_k(0)$ dado anteriormente.

1.0.1 Ejemplo.-

Problema de difusión de calor de una barra aislada

Una barra metálica de 100 cm de longitud tiene los extremos ($x = 0$ y $x = 100$) mantenidos a $0^\circ C$. Inicialmente la mitad de la barra está a $60^\circ C$, mientras que la otra mitad a $40^\circ C$. Asumiendo una difusividad de 0.16 unidades cgs y que la superficie de la barra está aislada, encontrar la temperatura en toda parte de la barra en el tiempo t .

Formulación matemática :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0.16 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.24)$$

$$u(0, t) = u(100, t) = 0 \quad (3.25)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 60 & , \quad 0 \leq x \leq 50 \\ 40 & , \quad 50 \leq x \leq 100 \end{cases} \quad (3.26)$$

Asumimos que la solución $u(x, t)$ es de la forma

$$u = X.T \quad (3.27)$$

Reemplazando (3.27) en (3.24) tenemos

$$\begin{aligned} X.T' &= 0.16X''T \\ \frac{T'}{0.16T} &= \frac{X''}{X} = -\lambda^2 \end{aligned}$$

donde

$$T' + 0.16\lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0$$

La solución de estas ecuaciones son

$$T = C_1 e^{-0.16\lambda^2 t}, \quad X = C_2 \cos \lambda x + C_3 \sin \lambda x$$

Luego la solución es

$$\begin{aligned} u &= X.T \\ &= e^{-0.16\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \end{aligned} \quad (3.28)$$

De las condiciones de frontera (3.25) se tiene que $A = 0$ y $\lambda = \frac{n\pi}{100}$. Entonces, la solución (3.28) queda en la forma

$$u(x, t) = B \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) e^{-0.16\frac{n^2\pi^2}{100}t} \quad (3.29)$$

Usando el **principio de superposición de variables**, tenemos que

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-0.16\frac{n^2\pi^2}{100}t} \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) \quad (3.30)$$

donde los b_n son los coeficientes de Fourier.

Ahora reemplazamos la condición inicial (3.26) en (3.30)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) = f(x)$$

Así los coeficiente de Fourier b_n están dados por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{100} \int_0^{100} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) dx \\ &= \frac{2}{100} \int_0^{50} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) dx + \frac{2}{100} \int_{50}^{100} f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{100}x\right) dx \\ &= \frac{120}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{80}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) \end{aligned}$$

entonces tenemos

$$b_1 = \frac{200}{\pi}, \quad b_2 = \frac{40}{\pi}, \quad b_3 = \frac{200}{3\pi}, \dots \quad (3.31)$$

Así la solución será

$$u(x, t) = \frac{200}{\pi} e^{-16,10\pi^2 t} \sin \frac{\pi}{100} x + \frac{40}{\pi} e^{-64,10\pi^2 t} \sin \frac{2\pi}{100} x + \dots \quad (3.32)$$

□

1.0.2 Ejemplo.-

Problema de Difusión de calor de una barra no aislada

Si la superficie de una barra delgada de metal no está aislada sino, que la radiación puede ocurrir hacia los alrededores. Asumiremos que la ley de Newton de enfriamiento es aplicable, la ecuación que describe esto es

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C(u - u_0) \quad (3.33)$$

donde C es una constante y u_0 es la temperatura del medio.

Para transformar la ecuación (3.33) en una ecuación de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

hacer el cambio de variable

$$u - u_0 = ve^{\beta t}$$

En el problema de Fourier ambos extremos se mantuvieron a 0°C . Pero que sucede si los extremos de la barra se pueden alistar de modo que el calor no pueda ni escapar ni entrar por los extremos. Este problema conduce a una solución trivial, puesto que si la barra inicialmente tiene una temperatura de 100°C y si el calor no puede entrar ni salir por los extremos o por la superficie, entonces la temperatura permanecerá a 100°C en todo el tiempo. Para que el problema no sea trivial tendríamos que asumir que la temperatura inicial no es constante.

1.0.3 Ejemplo.-**Problema de difusión de calor con fronteras aisladas**

Tomemos la ecuación de difusión de calor unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (3.34)$$

Matemáticamente las condiciones de aislamiento en los extremos de la barra colocados en $x = 0$ y $x = L$ del eje X se expresan por

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \quad (3.35)$$

Además la temperatura inicial la indicamos por

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < L \quad (3.36)$$

Entonces la solución a la ecuación (3.34) la indicamos por

$$u(x, t) = e^{-\alpha\lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \quad (3.37)$$

Derivando (3.37) respecto a x

$$u_x = e^{-\alpha\lambda^2 t} (-A\lambda \sin \lambda x + B\lambda \cos \lambda x)$$

evaluando en el extremo izquierdo $x = 0$

$$u_x(0, t) = B\lambda e^{-\alpha\lambda^2 t} = 0$$

$$B = 0$$

Así tenemos la solución

$$u(x, t) = A e^{-\alpha\lambda^2 t} \cos \lambda x \quad (3.38)$$

Derivamos (3.38) respecto a x

$$u_x = -A\lambda e^{-\alpha\lambda^2 t} \sin \lambda x$$

evaluando en el extremo derecho $x = L$

$$u_x(L, t) = -A\lambda e^{-\alpha\lambda^2 t} \sin \lambda L$$

$$\sin \lambda L = 0$$

$$\lambda L = n\pi$$

$$L = \frac{n\pi}{\lambda}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Entonces la solución es

$$u(x, t) = Ae^{-\frac{\alpha n^2 \pi^2 t}{L^2}} \left(\cos \frac{n\pi}{L} x \right)$$

Para satisfacer la condición inicial (3.36) debemos usar el principio de superposición de soluciones y así llegamos a la solución final

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \cos \frac{n\pi}{L} x$$

entonces

$$u(x, 0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x = u_0(x)$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$$

1.0.4 Ejemplo.-

Conducción de calor en una barra con condiciones no cero en los extremos

En el problema de Fourier desde el punto de vista físico no hay razón de no haber escogido otras dos condiciones, tales como en el extremo $x = 0$ se mantienen a 20^0 y el extremo en $x = L$ a 60^0 .

Formulamos el problema de valor inicial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, t > 0 \quad (3.39)$$

$$u(0, t) = 20, \quad u(L, t) = 60 \quad (3.40)$$

$$u(x, 0) = 100 \quad (3.41)$$

Por el método de separación de variables llegamos a

$$u(x, t) = e^{-\alpha \lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) \quad (3.42)$$

Definamos una transformación de variable de u a w , esto es,

$$u(x, t) = w(x, t) + \psi(x) \quad (3.43)$$

Reemplazando (3.43) en (3.39)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi''(x) \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \psi''(x) \right) \quad (3.44)$$

Utilizamos las condiciones de frontera

$$u(0, t) = w(0, t) + \psi(0) = 20$$

$$w(0, t) = 20 - \psi(0) \quad (3.45)$$

$$u(L, t) = w(L, t) + \psi(L) = 60$$

$$w(L, t) = 60 - \psi(L) \quad (3.46)$$

Ahora utilizamos la condición inicial

$$u(x, 0) = w(x, 0) + \psi(x) = 100$$

$$w(x, 0) = 100 - \psi(x) \quad (3.47)$$

Puesto que lo que buscamos es aplicar el método de separación de variables, sería bueno escoger

$$\psi'' \equiv 0, \quad \text{ó} \quad \psi(x) = \alpha x + \beta \quad (3.48)$$

Entonces la ecuación diferencial queda en la forma

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.49)$$

También sería bueno que los lados derechos de (3.45) y (3.46) sean ceros. Esto se consigue si

$$\psi(0) = 20, \quad \psi(L) = 60$$

Esto nos permite determinar que $\alpha = \frac{40}{L}$ y $\beta = 20$ en (3.48), así que

$$\psi(x) = \frac{40}{L}x + 20$$

Resumiendo tenemos el nuevo problema que queda expresado como

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & 0 < x < L, t > 0 \\ w(0, t) &= 0, & w(L, t) &= 0 \\ w(x, 0) &= 100 - \psi(x), & \psi(x) &= \frac{40}{L}x + 20 \end{aligned}$$

Por el método de separación de variables llegamos a la solución

$$w(x, t) = e^{-\alpha \lambda^2 t} (A \cos \lambda x + B \operatorname{sen} \lambda x) \quad (3.50)$$

De las condiciones de frontera tenemos que

$$A = 0, \lambda = \frac{n\pi}{L}, n = 1, 2, \dots$$

$$w(x, t) = B e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \quad (3.51)$$

Por la condición inicial

$$100 - \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

entonces el coeficiente de Fourier b_n está dado por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L (100 - \psi(x)) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

Por lo tanto, la solución en la variable u es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 \pi^2 t / L^2} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) + \left(\frac{40}{L} x + 20 \right) \quad (3.52)$$

1.0.5 Ejemplo.-

Temperatura de estado estacionario en una placa semi infinita

Asumamos que los lados infinitos se mantienen a 0^0 y que la base de la placa (en el Eje X) se mantienen a una temperatura constante. Asumiremos también que las caras de la placa están aisladas, de modo que el calor no puede entrar ni escapar de ellas. Buscamos determinar la temperatura de estado estacionario de la placa, esto es, la temperatura que es independiente del tiempo.

Formulación matemática : Tenemos el problema de la conducción de calor en dos dimensiones en el plano XY y no dependiente del tiempo t

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & 0 < x < L, y > 0 \\ u(0, y) &= u(L, y) = 0 \\ u(x, 0) &= u_0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

Puesto que físicamente es imposible que la temperatura llegue a ser infinita en todo punto de la placa, asumiremos que $u(x, y)$ es acotada, es decir,

$$|u(x, y)| < M, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

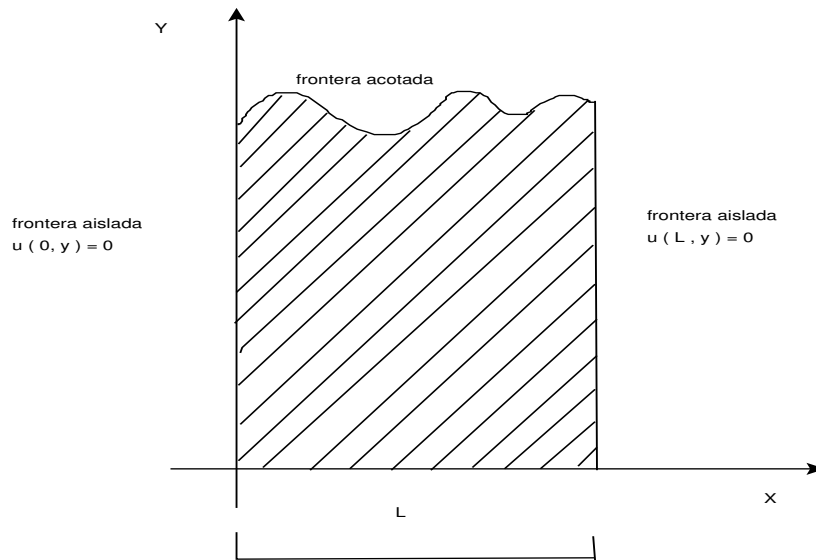


Figura 3.2: Dominio de la ecuación

Usaremos el método de separación de variables para hallar a la solución, esto es, suponemos que la solución es de la forma

$$u = XY \quad (3.54)$$

Reemplazando (3.54) en (3.53)

$$\begin{aligned} X''Y + XY'' &= 0 \\ \frac{X''}{X} &= -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \\ \frac{X''}{X} &= -\lambda^2, \quad -\frac{Y''}{Y} = -\lambda^2 \end{aligned}$$

Resolviendo estas ecuaciones ordinarias obtenemos

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x, \quad Y = C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y}$$

Entonces la solución es

$$u = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x)(C_3 e^{\lambda y} + C_4 e^{-\lambda y})$$

Asumiendo que $\lambda > 0$, esta solución llega a ser no acotada cuando $y \rightarrow \infty$. Para evitar esto, escogemos $C_3 = 0$,

$$u(x, y) = e^{-\lambda y}(A \cos \lambda x + B \sin \lambda x)$$

Usamos la condición de frontera izquierda $u(0, y) = 0$,

$$u(0, y) = Ae^{-\lambda y} = 0$$

de donde se obtiene que $A = 0$. Entonces la solución será

$$u = Be^{-\lambda y} \sin \lambda x$$

Ahora usamos la condición de frontera derecha $u(L, y) = 0$,

$$u(L, y) = Be^{-\lambda y} \sin \lambda L = 0$$

de donde se tiene que $\sin \lambda L = 0$ y $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$

La solución a la cual se le ha incorporado las condiciones de frontera está dada por

$$u = Be^{-\frac{n\pi}{L}y} \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (3.55)$$

Aplicamos el principio de superposición de soluciones a (3.56)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi}{L}y} \sin \frac{n\pi}{L}x$$

Usamos la condición inicial $u(x, 0) = u_0$,

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L}x = u_0$$

Así que el coeficiente de Fourier b_n está dado por

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L u_0 \sin \frac{n\pi}{L}x dx \\ &= \frac{2u_0(1 - \cos n\pi)}{n\pi} \end{aligned}$$

Finalmente, la solución que cumple las condiciones de iniciales y de frontera está dada por

$$u(x, y) = \frac{2u_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos n\pi}{n} e^{-n\pi y/L} \sin \frac{n\pi}{L}x \quad (3.56)$$

Por un procedimiento largo y tedioso se obtiene

$$u(x, y) = \frac{2u_0}{\pi} \tan^{-1} \left[\frac{\sin \frac{\pi}{L}x}{\sinh \frac{\pi}{L}y} \right]$$

1.0.6 Ejemplo.-**Problema de la cuerda vibrante**

Una cuerda flexible fuertemente tensionada se le da algún desplazamiento inicial por la función f y luego se suelta, el problema de valor de frontera para el desplazamiento $u(x, t)$ de la cuerda desde su posición de equilibrio en el eje X es

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < L, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0 & t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), & 0 < x < L \\ u_t(x, 0) &= 0 & 0 < x < L\end{aligned}\tag{3.57}$$

donde $u(x, t)$ es el desplazamiento de x en el tiempo t y L es la longitud de la cuerda.

Asumiendo que la solución del problema (3.57) es de la forma

$$u = X.T\tag{3.58}$$

Reemplazando (3.58) en (3.57) obtenemos

$$\begin{aligned}X.T'' &= a^2 X'' .T \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda^2\end{aligned}$$

de donde

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + a^2 \lambda^2 T = 0$$

cuyas soluciones están dadas por

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x, \quad T = C_3 \cos a \lambda t + C_4 \operatorname{sena} \lambda t$$

Entonces la solución es

$$u = (C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x)(C_3 \cos a \lambda t + C_4 \operatorname{sena} \lambda t)\tag{3.59}$$

Para que (3.59) se cumpla satisface la condición de frontera izquierda $u(0, t) = 0$ se debe tener $C_1 = 0$. Y para que se cumpla la condición de frontera derecha $u(L, t) = 0$,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \lambda L &= 0 \\ \lambda &= \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Entonces, la solución satisfaciendo las condiciones de frontera será

$$u = C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x (C_3 \cos \frac{n\pi a}{L} t + C_4 \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t)\tag{3.60}$$

Puesto que la tercera condición es algo complicada, pasamos a la cuarta condición. Para esto derivamos (3.60) respecto a la variable t

$$u_t = C_2 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \left(-C_3 \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi a}{L} t + C_4 \frac{n\pi a}{L} \cos \frac{n\pi a}{L} t \right)$$

de donde se obtiene que $C_4 = 0$. Así nos queda la solución

$$u(x, t) = B \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos \frac{n\pi a}{L} t \quad (3.61)$$

Para satisfacer la tercera condición de frontera, primero aplicamos el principio de superposición de soluciones

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos \frac{n\pi a}{L} t$$

Para el tiempo $t = 0$

$$u(x, 0) = u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

donde el coeficiente de Fourier b_n está dado por

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

Finalmente, la solución es

$$u(x, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^L u_0 \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \cdot \cos \frac{n\pi a}{L} t \quad (3.62)$$

1.0.7 Ejemplo.-

Cuerda vibrante con amortiguamiento

Desde el punto de vista real el modelo matemático que acabamos de obtener falla puesto que las vibraciones continúan indefinidamente, mientras que en realidad debería cesar gradualmente. Por tal motivo introducimos un término amortiguamiento proporcional a la velocidad instantánea de la cuerda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.63)$$

donde β es la constante de amortiguamiento y $\beta \frac{\partial u}{\partial t}$ es proporcional a la velocidad instantánea de la cuerda.

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (3.64)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 < x < L \quad (3.65)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (3.66)$$

Suponemos que la solución de (3.63) es de la forma

$$u = X.T \quad (3.67)$$

Reemplazamos (3.67) en (3.63)

$$X.T'' + \beta X.T' = a^2 X''.T$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} + \frac{\beta T'}{a^2 T} = -\lambda^2$$

De donde obtenemos las ecuaciones diferenciales

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad T'' + \beta T' + \lambda^2 a^2 T = 0$$

cuyas soluciones son

$$X = C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x; \quad T = e^{-\beta t/2} (C_3 \cos wt + C_4 \operatorname{sen} wt)$$

donde $w = \sqrt{\beta^2/4 - \lambda^2 a^2}$

Así tenemos la solución

$$u = e^{-\beta t/2} (C_1 \cos \lambda x + C_2 \operatorname{sen} \lambda x) (C_3 \cos wt + C_4 \operatorname{sen} wt) \quad (3.68)$$

Incorporada la condición de frontera izquierda $u(0, t) = 0$ a (3.68) se llega a determinar que $C_1 = 0$. Del mismo modo con la condición de frontera derecha $u(L, t) = 0$ llegamos a determinar que $\lambda = \frac{n\pi}{L}$, $n \in \mathbb{Z}$.

La solución modificada de (3.68) es entonces

$$u(x, t) = C_2 e^{-\beta t/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x (C_3 \cos wt + C_4 \operatorname{sen} wt) \quad (3.69)$$

La última condición de frontera (3.66) nos da que $C_4 = 0$. Mientras que para satisfacer la condición inicial (3.65) aplicamos el principio de superposición de soluciones

$$u(x, t) = e^{-\beta t/2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) \cos \gamma \quad (3.70)$$

donde $\gamma = \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 a^2}{L^2} - \frac{\beta^2}{4}}$. De modo que la tercera condición de frontera (3.65) conduce a

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x dx$$

3.2. Principio del máximo y el decaimiento exponencial

Damos dos de las propiedades más importantes de la ecuación del calor como son el principio del máximo, el decaimiento exponencial de las soluciones y el efecto regularizante, el cual significa que para todo tiempo positivo la solución de la ecuación del calor es infinitamente diferenciable, no importando la irregularidad de los datos iniciales.

2.1 Definición.-

Convergencia uniforme Una sucesión de funciones $f_n(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para f si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$n \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in [a, b] \quad (3.71)$$

Entre las principales propiedades de las sucesiones de funciones uniformemente convergente tenemos

Teorema 1

Si $f_n(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión que converge uniformemente para f , y si para todo n las funciones f_n son continuas, entonces el límite también es continuo.

Prueba. De la convergencia uniforme existe $N > 0$ tal que

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in [a, b]$$

Por otro lado, de la continuidad de f_N , existe $\delta > 0$ tal que

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

de estas dos últimas proposiciones tenemos que si

$$|x - y| < \delta$$

entonces

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(y)| + |f_N(y) - f(y)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

de donde se sigue la continuidad de f . ■

Teorema 2

Si $f_n(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una sucesión que converge uniformemente para f , y si f_n es continua para todo n , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (3.72)$$

Prueba. De la convergencia uniforme existe N tal que $\forall n \geq N$ se tiene

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \forall x \in [a, b] \quad (3.73)$$

de donde obtenemos

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \varepsilon$$

este resultado vale para toda sucesión de funciones integrables que converge uniforme. ■

2.1. Principio del máximo

El principio del máximo establece que la solución de la ecuación del calor no puede ser mayor ni menor que los datos del problema. En otras palabras, el máximo y el mínimo solamente son alcanzados en la frontera del conjunto $\Omega \times \mathbb{R}^+ =]0, L[\times]0, \infty[$

Teorema 3

Sea u la solución del problema

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u|_{\partial\Omega} = g \\ u(x, 0) = u_0(x), & \text{en } \Omega \end{cases} \quad (3.74)$$

Entonces, se cumple

$$\min \left\{ \inf_{\partial\Omega} g, \inf_{\Omega} u_0 \right\} \leq u(x, t) \leq \max \left\{ \sup_{\partial\Omega} g, \sup_{\Omega} u_0 \right\} \quad (3.75)$$

Prueba. Asumiremos que la función u_0 y g son continuas y que existe una solución continua u dos veces derivable. Si uno de los extremos de la función u está en la frontera, entonces no tenemos nada que probar.

Razonaremos por el absurdo. Para ello introducimos la función $v = u + \varepsilon |x|^2$. Observamos que v satisface

$$v_t - v_{xx} = -2\varepsilon < 0 \quad (3.76)$$

Supongamos que el máximo de la función v es alcanzado en el punto (x_0, t_0) del interior del dominio $\Omega \times \mathbb{R}^+$. Entonces tenemos que

$$\begin{pmatrix} v_t \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad v_{xx} \leq 0$$

Por tanto, en el punto (x_0, t_0) del interior del dominio se cumple

$$v_t(x_0, t_0) - \Delta v(x_0, t_0) \geq 0$$

Esta expresión contradice la desigualdad (3.76).

Por consiguiente, nuestra hipótesis de que el máximo de v está en el interior del dominio no es cierta. Por tanto, el máximo de v debe de encontrarse en la frontera del dominio, $\Omega \times \{0\} \cup \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$ y se debe cumplir

$$\begin{aligned} v(x, t) &\leq \max \left\{ \sup_{\Omega} v(x, 0), \sup_{\partial\Omega} v(x, t) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{\Omega} (u(x, 0) + \varepsilon |x|^2), \sup_{\partial\Omega} (u(x, t) + \varepsilon |x|^2) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{\Omega} u(x, 0) + \varepsilon L^2, \sup_{\partial\Omega} u(x, t) + \varepsilon L^2 \right\} \end{aligned}$$

concluimos que

$$u(x, t) \leq v(x, t) \leq \max \left\{ \sup_{\Omega} u(x, 0) + \varepsilon L^2, \sup_{\partial\Omega} u(x, t) + \varepsilon L^2 \right\}$$

haciendo $\varepsilon \rightarrow 0$ obtenemos

$$u(x, t) \leq \left\{ \sup_{\Omega} u_0, \sup_{\partial\Omega} g \right\} \quad (3.77)$$

Los mismos argumentos pueden ser utilizados para demostrar la desigualdad del lado izquierdo de (3.75), en el caso del mínimo, con lo que queda demostrado el teorema. ■

2.2. Decaimiento de soluciones

Para demostrar el decaimiento de soluciones, utilizaremos el método de la energía que se resume en el siguiente teorema.

Teorema 4

Sea u solución del problema (3.74), con la condición de que $g = 0$, entonces la energía de la solución satisface

$$E(t) := \int_0^L u(x,t)^2 dx \leq E(0) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t} \quad (3.78)$$

Prueba. Multiplicando la ecuación $u_t - \Delta u = 0$ por u tenemos

$$u_t u = u_{xx} u$$

la cual, utilizando fórmulas estándar de diferenciación se puede expresar como

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} u^2 = \frac{\partial}{\partial x} (u_x u) - u_x^2$$

integrando sobre $]0, L[$ obtenemos

$$\frac{d}{dt} E(t) = -2 \int_0^L u_x(x,t)^2 dx$$

luego por la desigualdad de Poincare

$$\int_0^L u^2 dx \leq \left(\frac{L}{\sqrt{2}\pi} \right) \int_0^L u_x^2 dx$$

obtenemos

$$\frac{d}{dt} E(t) \leq -\frac{\pi^2}{L^2} E(t)$$

resolviendo la desigualdad obtenemos

$$E(t) \leq E(0) e^{-\frac{\pi^2}{L^2} t}$$

de donde sigue el teorema. ■

2.3. Efecto regularizante

Esta propiedad garantiza que, dependiendo de la condición inicial, la solución del problema de conducción del calor puede ser suficientemente regular, se resume en el siguiente teorema

Teorema 5

Sea u_0 una función continua, para la cual exista una solución u para la ecuación del calor

$$u_t - u_{xx} = 0 \quad \text{en} \quad]0, L[\times]0, \infty[\quad (3.79)$$

entonces tenemos que

$$u \in C^\infty(]0, T[\times]0, L[) \quad (3.80)$$

(ver [?] para la prueba.)

Para obtener la solución aproximada o numérica de (3.1), esta ecuación es discretizada generando un sistema de ecuaciones algebraicas que se manipulan para generar un algoritmo. El algoritmo da la solución en el nivel $(n+1)$ -ésimo de tiempo en términos de la solución conocida en los niveles $n-1$ y n .

Para discretizar (3.1) se pueden utilizar esquemas explícitos o implícitos.

3.3. Esquemas explícitos

Un esquema es explícito si la única variable desconocida, por ejemplo v_j^{n+1} , aparece en el lado izquierdo de la fórmula algebraica como resultados de la discretización.

3.1. Esquema FTCS

Tenemos el esquema de diferencias progresivas para la ecuación (3.1),

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.81)$$

Este esquema es puntualmente consistente con la ecuación (3.1) con un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$.

El esquema se puede escribir en la forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = r v_{j-1}^n + (1 - 2r) v_j^n + r v_{j+1}^n \quad (3.82)$$

Observar que los valores en los niveles $n+1$ se obtienen únicamente conociendo los valores en el nivel n , por ello nuestro esquema pertenece al conjunto de esquemas explícitos.

Para analizar la estabilidad aplicamos la transformada de Fourier a la ecuación (3.81), utilizando la identidad $\hat{v}^{n+1} = e^{\pm i\theta} \hat{v}^n$

$$\begin{aligned} \hat{v}^{n+1} &= r e^{-i\theta} \hat{v}^n + (1 - 2r) \hat{v}^n + r e^{i\theta} \hat{v}^n \\ &= (r e^{-i\theta} + (1 - 2r) + r e^{i\theta}) \hat{v}^n \end{aligned} \quad (3.83)$$

donde

$$g(\theta) = re^{-i\theta} + (1 - 2r) + re^{i\theta} \quad (3.84)$$

es el factor de amplificación el cual se puede escribir como

$$g(\theta) = 1 - 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (3.85)$$

tal que para cualquier valor de θ se tiene $|g(\theta)| \leq 1$ si $r \leq 0.5$. Así (3.82) producirá soluciones estables si $r \leq 0.5$. Aplicando el Teorema de Lax tenemos que el esquema es convergente de orden $[O(\Delta t), O(\Delta x)^2]$.

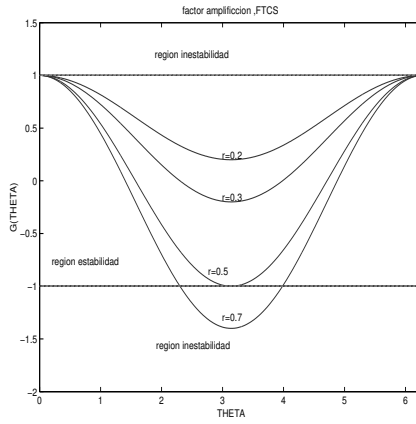


Figura 3.3: FTCS, $r = 0.2, 0.3, 0.5, 0.7$

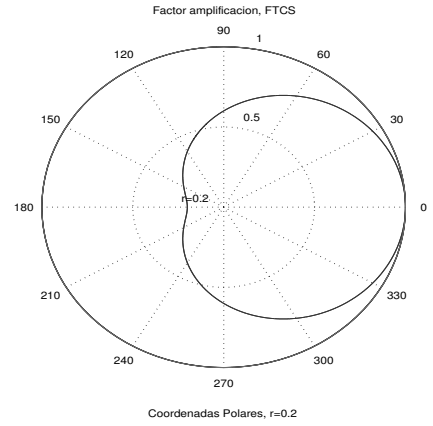


Figura 3.4: FTCS, Polares $r = 0.2$

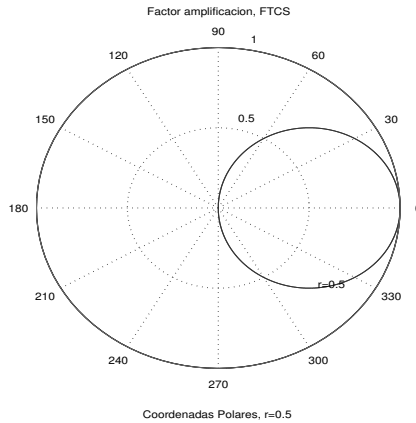


Figura 3.5: FTCS, Polares $r = 0.5$

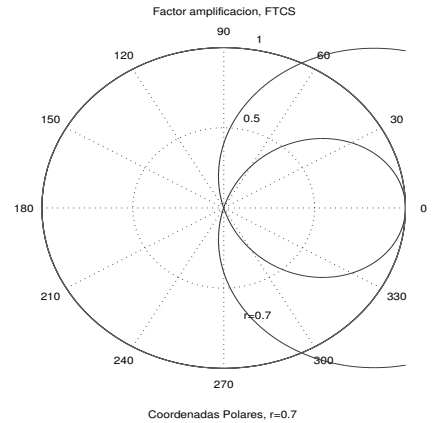


Figura 3.6: FTCS, Polares $r = 0.7$

En la figura (3.3) se muestra que $|g(\theta)| \leq 1$ si $r = 0.2, 0.3, 0.5$, es decir, los valores del factor de amplificación caen dentro de la región de estabilidad y $|g(\theta)| > 1$ para $r = 0.7$, los valores caen fuera de la región de estabilidad.

En las figuras (3.4) y (3.5) se muestra que el factor de amplificación (3.83) en coordenadas polares para un radio $r = 0.2$ y $r = 0.5$ caen dentro de la circunferencia $|g| = 1$ (región de estabilidad) y en la figura (3.6) tenemos el factor de amplificación (3.83) para radio $r = 0.7$ que sale fuera de la circunferencia $|g| = 1$ (región de inestabilidad)

3.2. Esquema Leapfrog

Usando diferencias centrales en el tiempo y diferencias centrales en el espacio tenemos el esquema

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.86)$$

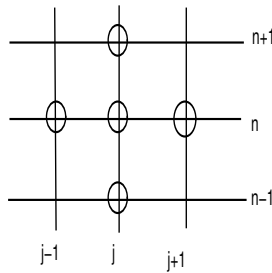


Figura 3.7: Molécula de cálculo para Leapfrog

La ecuación (3.86) podemos escribirla en la forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} + 2r(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) \quad (3.87)$$

El esquema (3.86) calcula los valores en el nivel $n + 1$ utilizando los valores en los niveles n y $n - 1$. Por ello para la primera iteración podemos utilizar FTCS o cualquier otro método explícito estable.

Aunque el esquema es de orden de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$, un análisis de estabilidad de von Neumann indica que el esquema (3.86) tiene un factor de amplificación

$$g = -4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \pm \sqrt{1 + 16r^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (3.88)$$

el cual es $|g| > 1$ para todo θ y todo r . Esto demuestra que el esquema es incondicionalmente inestable para todo $r > 0$. Por lo tanto, por el teorema de Lax, no puede ser convergente.

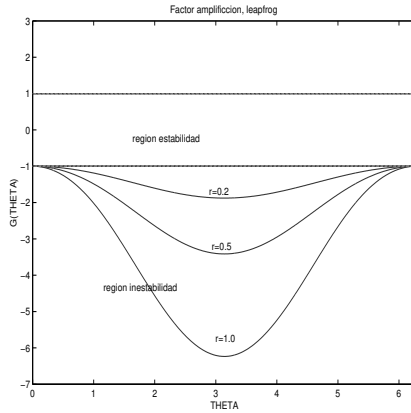


Figura 3.8: Leapfrog, Polares $r = 0.2, 0.5, 1.0$

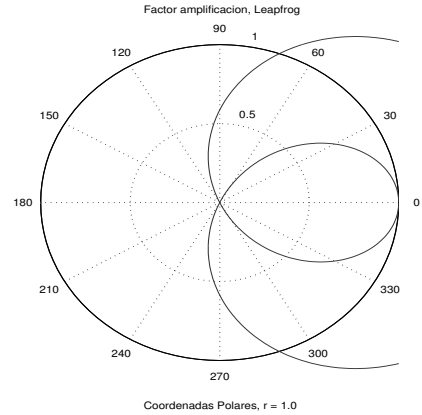


Figura 3.9: Leapfrog, Polares $r = 1.0$

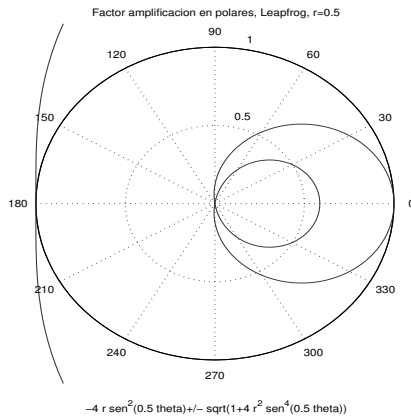


Figura 3.10: Leapfrog, Polares $r = 0.5$

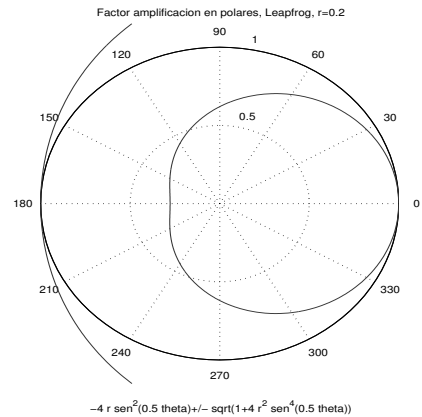


Figura 3.11: Leapfrog, Polares $r = 0.2$

La figura (3.8) muestra que $|g(\theta)| > 1$ para cualquier r , en particular para $r = 0.2, 0.5, 1.0$ vemos que los valores del factor de amplificación caen fuera de la región de estabilidad.

En las figuras (3.9), (3.10) y (3.11) se muestran el factor de amplificación en coordenadas polares para radio $r = 0.2, 0.3, 1.0$ respectivamente, donde se observa que los valores salen fuera de la región de estabilidad.

3.3. Esquema Du Fort-Frankel

El esquema Leapfrog (3.86) puede ser modificado para producir un algoritmo estable. Esto se puede lograr reemplazando $-v_j^n$ en (3.86) por $-0,5(v_j^{n+1} + v_j^{n-1})$. El resultado es la ecuación

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - (v_j^{n+1} + v_j^{n-1}) + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.89)$$

El esquema (3.89) puede ser manipulado para producir un algoritmo explícito

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{2r}{1+2r} \right) (v_{j-1}^n + v_{j+1}^n) + \left(\frac{1-2r}{1+2r} \right) v_j^{n-1} \quad (3.90)$$

El esquema Du Fort-Frankel (3.89) es de tres niveles en el tiempo a menos que $r = 0,5$, para el cual este coincide con el esquema FTCS. Para esquemas de tres niveles, dos niveles de tiempo de la solución deben calcularse primero. Una alternativa es utilizar un esquema de dos niveles para calcular el primer paso de tiempo. Este esquema está dentro de los esquemas de paso múltiple, pues usa una diferencia central para aproximar la derivada temporal en el nodo (j, n) , así como un promedio espacial en la parte difusa.

Igual que antes, consideremos una función ϕ diferenciable y utilizamos la serie de Taylor en dimensión uno.

El operador diferencial discreto L_j^n aplicado a ϕ es dado por

$$L_j^n \phi = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} - \alpha \frac{\phi_{j+1}^n - (\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1}) + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.91)$$

donde, $\phi_j^n = \phi(j\Delta x, n\Delta t)$.

Desarrollando la serie de Taylor de la función ϕ alrededor del punto $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$ para los valores de ϕ en los puntos vecinos.

$$\phi(x, t + \Delta t) = \phi(x, t) + \Delta t \phi_t(x, t) + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \phi_{tt}(x, t) + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \phi_{ttt}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

En términos de índices la serie anterior se escribe como

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \Delta t \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \phi_{tt} + \frac{1}{3!} \Delta t^3 \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (3.92)$$

Ahora desarrollando por serie de Taylor el término $\phi(x, t - \Delta t)$ tenemos

$$\phi(x, t - \Delta t) = \phi(x, t) - \Delta t \phi_t(x, t) + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \phi_{tt}(x, t) - \frac{1}{3!} \Delta t^3 \phi_{ttt}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

es decir la cual en notación de índices se escribe

$$\phi_j^{n-1} = \phi_j^n - \Delta t \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta t^2 \phi_{tt} - \frac{1}{3!} \Delta t^3 \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (3.93)$$

Utilizando la serie de Taylor para ϕ en la variable espacial obtenemos

$$\begin{aligned}\phi(x + \Delta x, t) = & \phi(x, t) + \Delta x \phi_x(x, t) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx}(x, t) + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx}(x, t) + \\ & \frac{1}{4!} \Delta x^4 \phi_{xxxx}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^5)\end{aligned}$$

y en la notación de índice

$$\phi_{j+1}^n = \phi_j^n + \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + \frac{1}{4!} \Delta x^4 \phi_{xxxx}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (3.94)$$

Finalmente, el valor de ϕ en el punto (x_{j-1}, t_n)

$$\begin{aligned}\phi(x - \Delta x, t) = & \phi(x, t) - \Delta x \phi_x(x, t) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx}(x, t) - \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx}(x, t) + \\ & \frac{1}{4!} \Delta x^4 \phi_{xxxx}(x, t) + \mathcal{O}(\Delta x^5)\end{aligned}$$

$$\phi_{j-1}^n = \phi_j^n - \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + \frac{1}{4!} \Delta x^4 \phi_{xxxx} + \mathcal{O}(\Delta x^5) \quad (3.95)$$

Sustituyendo estas expresiones (3.92), (3.93), (3.94) y (3.95) en las diferencias del operador discreto $L_j^n \phi$ dado en (3.91), teniendo en cuenta que derivadas $\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \phi_{xxx}, \phi_{xxxx}$, son evaluadas en el punto $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$, tenemos:

De (3.92) y (3.93) se tiene

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^{n-1}}{2\Delta t} = \phi_t + \frac{\Delta t^2}{3!} \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t^4) = \phi_t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \quad (3.96)$$

y

$$\phi_j^{n+1} + \phi_j^{n-1} = 2\phi + \Delta t^2 \phi_{tt} + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (3.97)$$

De (3.94) y (3.95) obtenemos

$$\phi_{j+1}^n + \phi_{j-1}^n = 2\phi + \Delta x^2 \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \quad (3.98)$$

Sustrayendo (3.97) de (3.98), multiplicando esta diferencia por $-\alpha/\Delta x^2$ y adicionando con (3.96) obtenemos

$$L_j^n \phi = \phi_t - \alpha \phi_{xx} + \alpha \Delta t^2 \Delta x^{-2} \phi_{tt} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^{-2})$$

y de ello se cumple

$$L_j^n \phi - L_j^n \phi = \alpha \Delta t^2 \Delta x^{-2} \phi_{tt} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^{-2}) \quad (3.99)$$

Observamos que el esquema de Du Fort-Frankel es consistente con la ecuación de difusión si; $\frac{\Delta t}{\Delta x} \rightarrow 0$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$

Aplicamos el criterio de von Neumann para determinar la estabilidad del esquema (3.89). Para ello escribimos el esquema en la forma

$$(1 + 2r)v_j^{n+1} = 2r(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + (1 - 2r)v_j^{n-1} \quad (3.100)$$

Sustituyendo $g^n e^{ij\theta}$ en v_j^n en esta ecuación obtenemos

$$(1 + 2r)g^{n+1} e^{ij\theta} = 2r(g^n e^{i(j+1)\theta} + g^n e^{i(j-1)\theta}) + (1 - 2r)g^{n-1} e^{ij\theta}$$

Simplificando el término $g^n e^{ij\theta}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$(1 + 2r)g = 2r(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) + (1 - 2r)g^{-1}$$

multiplicando por g a este ecuación

$$(1 + 2r)g^2 - 2r(e^{i\theta} + e^{-i\theta})g - (1 - 2r) = 0 \quad (3.101)$$

que se escribe como la ecuación cuadrática en g

$$(1 + 2r)g^2 - 4r(\cos \theta)g - (1 - 2r) = 0$$

resolviendo esta ecuación tenemos

$$g_{\pm} = \frac{4r(\cos \theta) \pm \sqrt{16r^2 \cos^2 \theta + 4(1 - 4r^2)}}{2(1 + 2r)}$$

de esto

$$g_{\pm} = \frac{2r \cos \theta \pm \sqrt{1 + 4r^2 \cos^2 \theta - 4r^2}}{1 + 2r}$$

Obteniendo finalmente las dos raíces del factor de amplificación

$$g_{\pm} = \frac{2r \cos \theta \pm \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2 \theta}}{1 + 2r} \quad (3.102)$$

Ahora analizamos los siguientes casos

1. Si se cumple que

$$1 - 4r^2 \sin^2 \theta \geq 0 \quad (3.103)$$

entonces se tiene que

$$0 \leq 4r^2 \sin^2 \theta \leq 1, \quad \text{es decir} \quad 0 \leq 1 - 4r^2 \sin^2 \theta \leq 1$$

por consiguiente

$$|g_{\pm}| \leq \frac{2r |\cos \theta| + \sqrt{1 - 4r^2 \sin^2 \theta}}{1 + 2r} \leq \frac{2r + 1}{1 + 2r} = 1$$

Concluyendo, podemos decir que si se cumpliera (3.103), la condición de von Neumann sería satisfecha

$$|g_{\pm}| \leq 1$$

y el esquema de Du Fort-Frankel es estable.

2. Si cumpliera

$$1 - 4r^2 \sin^2 \theta = -b^2 < 0 \quad (3.104)$$

entonces

$$1 \leq 4r^2 \sin^2 \theta \leq 4r^2, \quad \text{es decir} \quad 1 - 4r^2 = (1 + 2r)(1 - 2r) \leq 0$$

como $1 + 2r > 0$ entonces se tiene

$$1 - 2r \leq 0 \quad (3.105)$$

luego el factor de amplificación es complejo

$$g_{\pm} = \frac{2r \cos \theta \pm ib}{1 + 2r}$$

entonces el cuadrado del módulo es

$$|g|^2 = \frac{(2r \cos \theta)^2 + 4r^2 \sin^2 \theta - 1}{(1 + 2r)^2}$$

de donde

$$|g|^2 = \frac{4r^2 - 1}{(1 + 2r)^2} = \frac{(2r + 1)(2r - 1)}{(1 + 2r)^2} = \frac{2r - 1}{1 + 2r} < 1$$

en la última desigualdad utilizamos (3.105). Concluimos también que bajo la restricción (3.104), el esquema es estable.

Por tanto, el esquema de Du Fort-Frankel es estable sin restricciones y por el teorema de Lax el esquema es convergente, con la única condición exigida por la consistencia, donde observamos que Δt va más rápido a cero que el valor de Δx .

Para graficar el factor de amplificación (3.102) para el caso $r > 0.5$, lo parametrizamos en la forma

$$\begin{cases} x = \frac{2r \cos \theta}{1 + 2r} \\ y = \pm \frac{\sqrt{4r^2 \sin^2 \theta - 1}}{1 + 2r} \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \frac{4r^2 \cos^2 \theta}{(1+2r)^2} + \frac{4r^2 \sin^2 \theta - 1}{(1+2r)^2} \\ &= \frac{4r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - 1}{(1+2r)^2} \\ &= \frac{2r-1}{1+2r} \end{aligned}$$

tenemos

$$x^2 + y^2 = \frac{2r-1}{1+2r} \quad (3.106)$$

una circunferencia con centro en el origen y radio $\sqrt{\frac{2r-1}{1+2r}}$

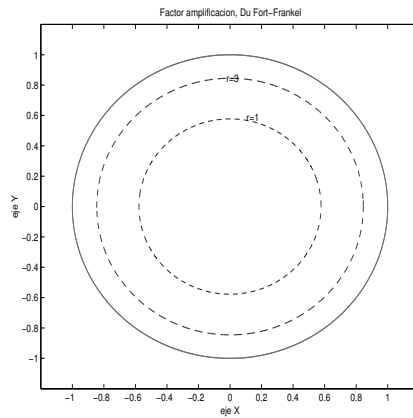
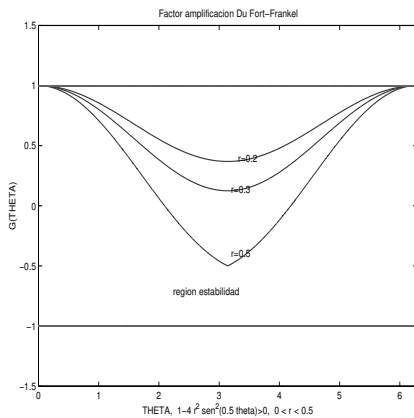


Figura 3.12: *Du Fort-Frankel*, $r = 0.2, 0.3, 0.5$

Figura 3.13: *Du Fort-Frankel* $r = 1.0, 3.0$

En la figura (3.12) se muestra que el factor de amplificación (3.102) con $1 - 4r^2 \sin^2(\theta) > 0$ y $r < 0.5$ y en la figura (3.13) se muestra el factor de amplificación (3.102) con $1 - 4r^2 \sin^2(\theta) < 0$ y $r > 0.5$. En ambas figuras se observa que el factor de amplificación cae dentro de la región de estabilidad para cualquier valor de r .

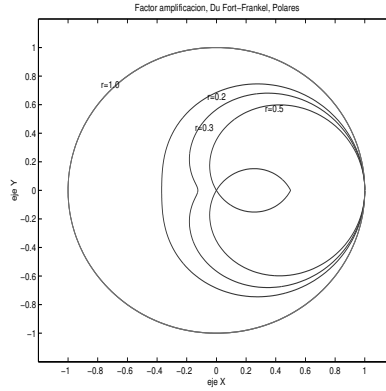


Figura 3.14: *Du Fort-Frankel, Polares.*

En la figura (3.14) se muestra el factor de amplificación (3.102) en coordenadas polares para un radio $r = 0.2; 0.3; 0.5; 1.0$ que se encuentra siempre dentro de la circunferencia unitaria centrada en el origen (región de estabilidad).

Los esquemas de diferencias finitas dados hasta el momento tienen el inconveniente de ser condicionalmente estables. A continuación presentamos una familia de esquemas que son incondicionalmente estables.

3.4. Esquemas implícitos

Para esquemas implícitos el término espacial $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ en (3.1) es evaluado, al menos parcialmente, en un nivel de tiempo desconocido $(n+1)$. En la práctica esto permite un acoplamiento de las ecuaciones por cada nodo $(j, n+1)$ en el nivel de tiempo $(n+1)$ y se presenta la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas que avanza en el tiempo.

4.1. Esquema BTCS o Euler retrasado

Un esquema implícito simple de diferencias finitas para aproximar (3.1) está dado por

$$\frac{v_j^n - v_j^{n-1}}{\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.107)$$

Para generar un algoritmo que sea posible implementarlo, la ecuación (3.107) puede escribirse como

$$-rv_{j-1}^n + (1+2r)v_j^n - rv_{j+1}^n = v_j^{n-1} \quad (3.108)$$

donde $j = 0, 1, \dots, N$, $n = 0, 1, \dots, kmax$ y $r = \alpha \Delta t \Delta x^{-2}$. Verifiquemos la consistencia del esquema de Euler retrasado, para ello utilizamos la serie de Taylor. En efecto, observemos que el operador diferencial continuo es dado por:

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

el mismo que aplicado a una función suave ϕ se tiene

$$L\phi = \phi_t - \alpha \phi_{xx}.$$

En tanto que el operador discreto L_j^n , aplicado a la función ϕ es el siguiente

$$L_j^n \phi = \frac{\phi_j^n - \phi_j^{n-1}}{\Delta t} - \alpha \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta^2} \quad (3.109)$$

Utilicemos una función suave ϕ y desarrollemos por Taylor en el punto (x_j, t_n) , las expresiones $\phi_j^{n-1} = \phi(x_j, t_n - k)$, $\phi_{j+1}^n = \phi(x_j + h, t_n)$ y $\phi_{j-1}^n = \phi(x_j - h, t_n)$

$$\phi(x_j, t_n - \Delta t) = \phi(x_j, t_n) - \Delta t \phi_t(x_j, t_n) + O(\Delta t^2),$$

en la notación de índices, tenemos

$$\phi_j^{n-1} = \phi_j^n - \Delta t \phi_t + O(\Delta t^2), \quad (3.110)$$

Luego la serie de Taylor de $\phi(x_j - \Delta x, t_n)$ en (x_j, t_n) , es

$$\begin{aligned} \phi(x_j - \Delta x, t_n) &= \phi(x_j, t_n) - \Delta x \phi_x(x_j, t_n) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx}(x_j, t_n) - \\ &\quad \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx}(x_j, t_n) + O(\Delta x^4) \end{aligned}$$

En notación indicial

$$\phi_{j-1}^n = \phi_j^n - \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + O(\Delta x^4) \quad (3.111)$$

De manera similar con $\phi(x_j + h, t_n)$ en (x_j, t_n) , obtenemos

$$\phi_{j+1}^n = \phi_j^n + \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + O(\Delta x^4) \quad (3.112)$$

las derivadas $\phi_t, \phi_x, \phi_{xx}, \phi_{xxx}$ son evaluadas en el punto $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)$.

Sustituyendo las series (3.110), (3.111), (3.112) en el operador discretizado $P_{h,k}\phi_j^n$ dado en (3.109), obtenemos

$$\begin{aligned} L_j^n \phi &= \frac{1}{\Delta t} (\phi_j^n - \phi_j^{n-1} + \Delta t \phi_t + \mathcal{O}(\Delta t^2)) \\ &- \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left(\phi_j^n + \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4) - 2\phi_j^{n-1} \right) \\ &- \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left(\phi_j^{n-1} - \Delta x \phi_x + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} - \frac{1}{3!} \Delta x^3 \phi_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x^4) \right) \end{aligned}$$

la cual se puede escribir como

$$L_j^n \phi = \frac{1}{\Delta t} (\Delta t \phi_t + \mathcal{O}(\Delta t^2)) - \frac{\alpha}{\Delta x^2} (\Delta x^2 \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^4) + \mathcal{O}(\Delta x^4))$$

Simplificando, y teniendo en cuenta la notación del operador diferencial L y el hecho que $\mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \mathcal{O}(\Delta x^2)$, tenemos

$$\begin{aligned} L_j^n \phi &= \phi_t - \alpha \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t) \\ &= L\phi_j^n + \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t) \end{aligned}$$

De donde tenemos la forma

$$L_j^n \phi - L\phi_j^n = \mathcal{O}(\Delta x^2) + \mathcal{O}(\Delta t) \quad (3.113)$$

Observando que

$$L_j^n \phi - L\phi_j^n \rightarrow 0, \quad \text{cuando } \Delta t, \Delta x \rightarrow 0$$

Decimos que el esquema de diferencias finitas Euler retrasado es consistente con la ecuación diferencial parcial (3.107).

De la ecuación (3.113) vemos que el orden de precisión es $(1, 2)$.

Para analizar la estabilidad del esquema de Euler retrasado, utilizamos el criterio de von Neumann. Para ello tomemos el esquema en la forma

$$-rv_{j+1}^{n+1} + (1+2r)v_j^{n+1} - rv_{j-1}^{n+1} = v_j^n$$

sustituyendo $g^n e^{ij\theta}$ en v_j^n , tenemos

$$-rg^{n+1} e^{i(j-1)\theta} + (1+2r)g^{n+1} e^{i\theta} - rg^{n+1} e^{i(j+1)\theta} = g^n e^{ij\theta}$$

dividiendo por g^n tenemos

$$-rge^{ij\theta} e^{-i\theta} + (1+2r)ge^{ij\theta} - rge^{ij\theta} e^{i\theta} = e^{ij\theta}$$

multiplicando por $e^{-ij\theta}$

$$-rge^{-i\theta} + (1+2r)g - rge^{i\theta} = 1$$

De esta forma tenemos el factor de amplificación de la forma

$$g = \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}}. \quad (3.114)$$

Analizando

$$0 \leq \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1 \quad \text{entonces} \quad 1 \leq 1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2} \leq 1 + 4r$$

De esto se tiene la desigualdad

$$0 < \frac{1}{1+4r} \leq \frac{1}{1+4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \leq 1$$

es decir

$$0 < g \leq 1 < 1 + \Delta t \theta$$

Esta última desigualdad es la condición de estabilidad de von Neumann, por consiguiente el esquema de Euler retrasado es estable sin restricciones. Así, por el Teorema de Lax, el esquema es convergente.

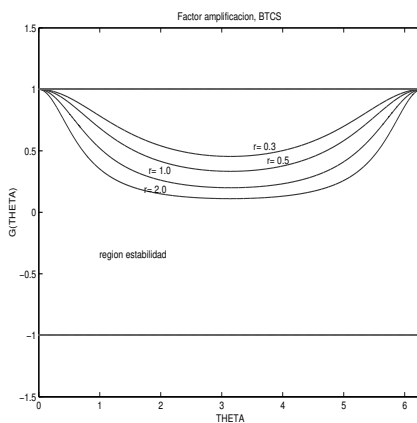


Figura 3.15: BTCS, $r = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$

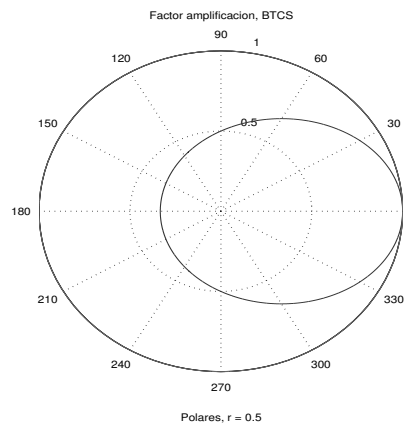
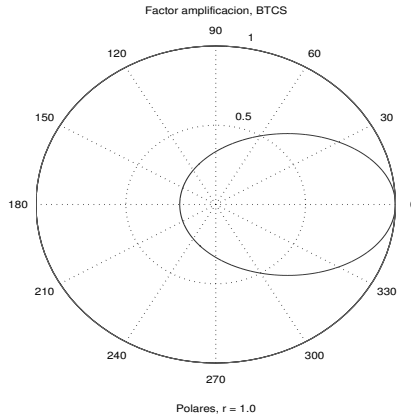
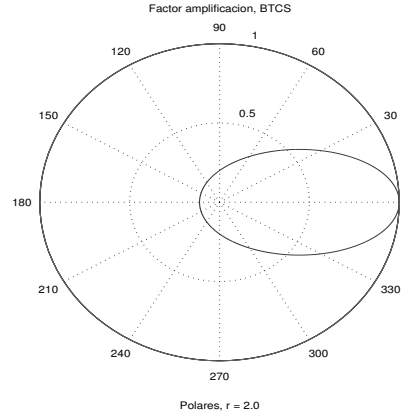


Figura 3.16: BTCS, $r = 0.5$

Figura 3.17: *BTCS*, $r = 1.0$ Figura 3.18: *BTCS*, $r = 2.0$

La figura (3.15) muestra los valores del factor de amplificación (3.114) para $r = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$ que se encuentran dentro de la región de estabilidad. Las figuras (3.16), (3.17) y (3.18) muestran los valores del factor de amplificación en coordenadas polares para radio $r = 0.5, 1.0, 2.0$ respectivamente que caen dentro de la región de estabilidad $|g| = 1$.

4.2. Esquema Crank-Nicolson

Una alternativa de un esquema implícito para aproximar (3.1) es el esquema de Crank-Nicolson que se obtiene promediando los esquemas BTCS y FTCS.

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}\alpha \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}\alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (3.115)$$

Observar que este esquema evalúa la derivada espacial como el promedio de los n y $n+1$ niveles de tiempo, es decir, en el nivel $(n+1/2)$ de tiempo. Si desarrollamos Taylor en el nodo $(j, n+1/2)$, el esquema (3.115) es consistente con (3.1) con un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2$. Esta es una considerable modificación de los esquemas BTCS y FTCS que son solo de primer orden de precisión en el tiempo.

Para generar un algoritmo, la ecuación (3.115) puede escribirse en la forma

$$-0.5rv_{j-1}^{n+1} + (1+r)v_j^{n+1} - 0.5rv_{j+1}^{n+1} = 0.5rv_{j-1}^n + (1-r)v_j^n + 0.5rv_{j+1}^n \quad (3.116)$$

Este esquema utiliza 6 puntos de la malla, (x_{j-1}, t_n) , (x_j, t_n) , (x_{j+1}, t_n) , (x_{j-1}, t_{n+1}) , (x_j, t_{n+1}) , (x_{j+1}, t_{n+1}) y luego utilizaremos la serie de Taylor en dos variables.

Para analizar la consistencia del esquema de Crank-Nicolson, utilizamos una función ϕ suficientemente diferenciable, luego utilizamos la serie de Taylor en dos dimensiones para escribir los valores $\phi(x_{j-1}, t_n)$, $\phi(x_j, t_n)$, $\phi(x_{j+1}, t_n)$, $\phi(x_{j-1}, t_{n+1})$, $\phi(x_j, t_{n+1})$ y $\phi(x_{j+1}, t_{n+1})$ en el punto $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$.

En efecto: Por simplicidad denotamos por (x, t) el punto $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$, tenemos que el operador diferencial discretizado $L_j^n \phi$ es dado por:

$$L_j^n \phi = \frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\phi_{j+1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{1}{2} \alpha \frac{\phi_{j+1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (3.117)$$

donde, $\phi_j^n = (j\Delta x, n\Delta t)$.

Las series de Taylor son

$$\begin{aligned} \phi(x - \Delta x, t - \frac{\Delta t}{2}) &= \phi(x, t) - \Delta x \phi_x(x, t) - \frac{\Delta t}{2} \phi_t(x, t) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx}(x, t) + \\ &\quad \frac{\Delta t}{2} \Delta x \phi_{xt}(x, t) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt}(x, t) - \frac{\Delta x^3}{3!} \phi_{xxx}(x, t) - \\ &\quad \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt}(x, t) - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{2!} \Delta x \phi_{xtt}(x, t) - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{2!} \Delta x^2 \phi_{xxt}(x, t) + \\ &\quad \mathcal{O}(\Delta t)^4 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 + \mathcal{O}(\Delta t^3 \Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2). \end{aligned}$$

Utilizando la notación discreta, eliminando las notaciones del punto (x, t) tenemos que la serie anterior se escribe como

$$\begin{aligned} \phi_{j-1}^n &= \phi_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta x \phi_x - \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{\Delta t}{2} \Delta x \phi_{xt} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} \phi_{xxx} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{2!} \Delta x \phi_{xtt} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{2!} \Delta x^2 \phi_{xxt} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t)^4 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 + \mathcal{O}(\Delta t^3 \Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.118)$$

Ahora el término $\phi(x_j, t_n)$ se aproxima por Taylor en $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$ obteniendo

$$\phi_j^n = \phi_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (3.119)$$

Asi también el valor $\phi(x + \Delta x, t - \Delta t/2)$ se expresa como

$$\begin{aligned} \phi_{j+1}^n &= \phi_j^{n+\frac{1}{2}} + \Delta x \phi_x - \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \phi_{xt} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} \\ &\quad + \frac{\Delta x^3}{3!} \phi_{xxx} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{2!} \Delta t \phi_{xtt} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{2!} \Delta x^2 \phi_{xxt} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t)^4 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 + \mathcal{O}(\Delta t^3 \Delta x) + \mathcal{O}(\Delta t \Delta x^3) + \mathcal{O}(\Delta t^2 \Delta x^2) \end{aligned} \quad (3.120)$$

Nuevamente el valor $\phi(x - \Delta x, t + \Delta t/2)$ es expresado como

$$\begin{aligned}\phi_{j-1}^{n+1} &= \phi_j^{n+\frac{1}{2}} - \Delta x \phi_x + \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} - \frac{\Delta t}{2} \Delta x \phi_{xt} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} \\ &\quad - \frac{\Delta x^3}{3!} \phi_{xxx} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} - \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{2!} \Delta x \phi_{xtt} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{2!} \Delta x^2 \phi_{xxt} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t)^4 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 + \mathcal{O}(\Delta x \Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3 \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta t^2)\end{aligned}\quad (3.121)$$

Ahora el valor $\phi(x_j, t_{n+1})$ se aproxima por Taylor en $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$ obteniendo

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (3.122)$$

Finalmente, el valor $\phi(x_{j+1}, t_{n+1})$

$$\begin{aligned}\phi_{j+1}^{n+1} &= \phi_j^{n+\frac{1}{2}} + \Delta x \phi_x + \frac{\Delta t}{2} \phi_t + \frac{1}{2!} \Delta x^2 \phi_{xx} + \frac{\Delta t}{2} \Delta x \phi_{xt} + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 \phi_{tt} \\ &\quad + \frac{\Delta x^3}{3!} \phi_{xxx} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^3}{3!} \phi_{ttt} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{2!} \Delta x \phi_{xtt} + \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)}{2!} \Delta x^2 \phi_{xxt} \\ &\quad + \mathcal{O}(\Delta t)^4 + \mathcal{O}(\Delta x)^4 + \mathcal{O}(\Delta x \Delta t^3) + \mathcal{O}(\Delta x^3 \Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x^2 \Delta t^2)\end{aligned}\quad (3.123)$$

Ahora construyamos por partes el operador discreto $L_j^n \Phi$ dado en (3.117)

Utilizando las series (3.119) y (3.122) tenemos

$$\frac{\phi_j^{n+1} - \phi_j^n}{\Delta t} = \phi_t + 2 \frac{\left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2}{3!} \phi_{ttt} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 = \phi_t + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (3.124)$$

Nuevamente, utilizando las series (3.118), (3.119) y (3.120) tenemos

$$\frac{\phi_{j-1}^n - 2\phi_j^n + \phi_{j+1}^n}{\Delta x^2} = \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (3.125)$$

Y de las series (3.121), (3.122) y (3.123) tenemos

$$\frac{\phi_{j-1}^{n+1} - 2\phi_j^{n+1} + \phi_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} = \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (3.126)$$

Sumando las fórmulas (3.125) y (3.126) previamente multiplicadas por $\alpha/2$ y sustraer de (3.124) obtenemos el operador discreto

$$L_j^n \phi = \phi_t - \alpha^2 \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 = L_j^n \phi + \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (3.127)$$

Esta última ecuación puede ser escrita como

$$L\phi_j^n - L_j^n\phi = \mathcal{O}(\Delta t)^2 + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (3.128)$$

De la ecuación (3.128) concluimos que $L\phi_j^n - L_j^n\phi \rightarrow 0$, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta x \rightarrow 0$. Por lo que el esquema de Crank-Nicolson es consistente con la ecuación diferencial parcial de difusión, así como en la misma ecuación (3.128) vemos que el esquema tiene orden de precisión (2,2). Para analizar la estabilidad nuevamente utilizamos el criterio de von Neumann en el esquema

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{k} = \frac{1}{2}\alpha \frac{v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{1}{2}\alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{h^2}$$

Sea $r = \alpha \Delta t \Delta x^{-2}$. Sustituyendo $g^n e^{ij\theta}$ por v_j^n obtenemos

$$\begin{aligned} g^{n+1} e^{ij\theta} - g^n e^{ij\theta} &= \frac{1}{2}r \left[g^{n+1} e^{i(j+1)\theta} - 2g^{n+1} e^{ij\theta} + g^{n+1} e^{i(j-1)\theta} \right] + \\ &\quad \frac{1}{2}r \left[g^n e^{i(j+1)\theta} - 2g^n e^{ij\theta} + g^n e^{i(j-1)\theta} \right] \end{aligned}$$

Simplificando el término $g^n e^{ij\theta}$ en la ecuación anterior se obtiene

$$g - 1 = \frac{1}{2}r \left(g e^{i\theta} - 2g + g e^{-i\theta} \right) + \frac{1}{2}r \left(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta} \right) \quad (3.129)$$

Entonces la ecuación (3.129) se transforma en

$$g = 1 - 2gr \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} - 2r \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}$$

de donde obtenemos el factor de amplificación

$$g = \frac{1 - 2r \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}}{1 + 2r \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}} \quad (3.130)$$

La condición de estabilidad exige que $|g(\theta)| \leq 1$, lo cual es cierto para cualquier θ , $r > 0$. Así el esquema es incondicionalmente estable y por el teorema de Lax, [7],[10],[?], es convergente. Debido al orden de precisión temporal de segundo orden, el esquema de Crank-Nicolson es un muy popular esquema para resolver ecuaciones diferenciales parciales.

4.3. Esquemas semi-implícitos

Una generalización de (3.115) puede ser obtenida escribiendo

$$\frac{\Delta v_j^{n+1}}{\Delta t} = \alpha[(1 - \beta)L_{xx}v_j^n + \beta L_{xx}v_j^{n+1}], \quad (3.131)$$

donde $\Delta v_j^{n+1} = v_j^{n+1} - v_j^n$, $0 \leq \beta \leq 1$. Si $\beta = 0$ se tiene el esquema FTCS. Si $\beta = 0.5$ se obtiene el esquema de Crank-Nicolson y si $\beta = 1$ se obtiene el esquema BTCS.

Un análisis de estabilidad de von Neumann para (3.131) indica que la solución es estable si

$$\Delta t \leq \frac{0.5(\Delta x)^2}{\alpha(1 - 2\beta)} \quad (3.132)$$

para el caso $0 \leq \beta \leq 0.5$, y no hay restricciones si $0.5 \leq \beta \leq 1$.

Puede notarse que el esquema de Crank-Nicolson está en la frontera del régimen de estado incondicionalmente. Para muchos problemas de flúidos estables, este esquema es eficiente, por ejemplo, para problemas de transporte.

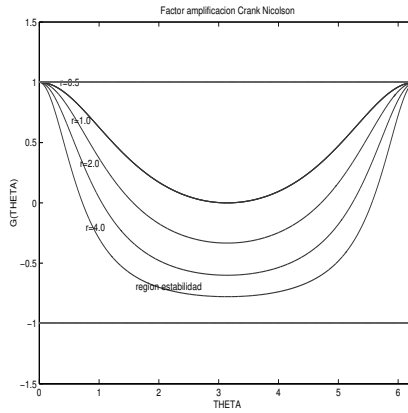


Figura 3.19: *Crank-Nicolson*

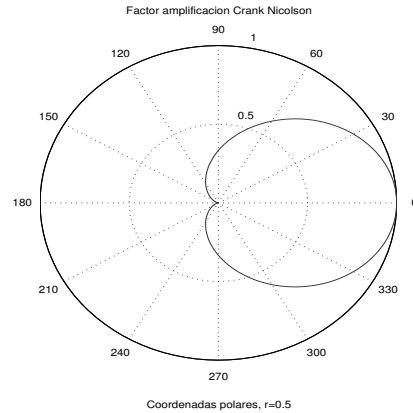


Figura 3.20: *Crank-Nicolson, radio = 0.*

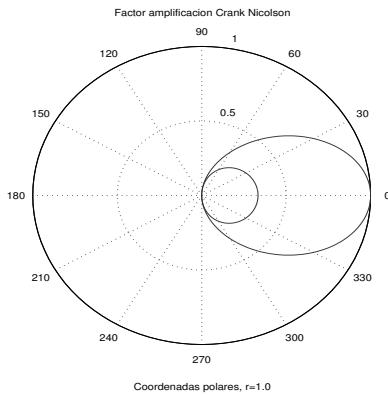


Figura 3.21: *Factor de amplificación Crank-Nicolson, Polares $r = 1.0$*

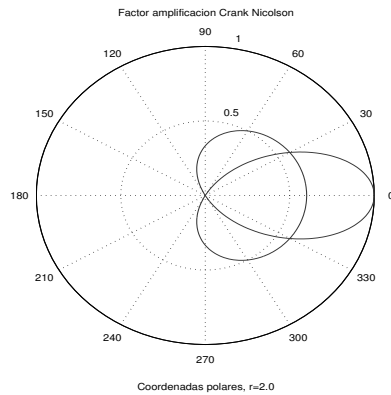


Figura 3.22: *Factor de amplificación Crank-Nicolson, Polares $r = 2.0$*

En la figura (3.19) se muestra el factor de amplificación del esquema (3.115) para los números de difusión de $r = 0.5, 1.0, 2.0, 4.0$, los cuales caen dentro de la región de estabilidad.

En las figuras (3.20), (3.21) y (3.22) se muestra el factor de amplificación del esquema (3.115) graficado en coordenadas polares para números de difusión $r = 0.5, 1.0, 2.0$.

3.5. Estabilidad de esquemas de diferencias finitas

Los conceptos de convergencia, consistencia y estabilidad se llevan a cabo sin cambios cuando generalizamos, como la definición de precisión; el principal cambio tiene ver con el aumento en la complejidad de los esquemas, sobre todo los esquemas implícitos. Hay muchos esquemas para sistemas multidimensionales que sirven para varias aplicaciones, tales como el análisis de flujo de un avión en ingeniería aeronáutica, predicciones numéricas del clima en meteorología y reservas de petróleo en geología. No podemos presentar esquemas particulares para estas aplicaciones, pero las ideas que nosotros introducimos son útiles en cada uno de estas áreas.

Discutiremos la ecuación de convección unidimensional y la ecuación difusión, y mostramos ahora cuánto de lo que dijimos se lleva a cabo para sistemas de la forma

$$\mathbf{u}_t + A \mathbf{u}_x = 0 \quad (3.133)$$

y

$$\mathbf{u}_t = B \mathbf{u}_{xx} \quad (3.134)$$

donde \mathbf{u} es un vector de funciones de dimensión d y A y B son matrices de orden $d \times d$. Para que el sistema (3.133) sea hiperbólico la matriz A debe ser diagonalizable con autovalores reales, y para que (3.134) sea parabólico todos los autovalores de la matriz B deben tener parte real positiva.

Casi todo lo que hemos hecho para ecuaciones escalares lo extendemos para sistemas de ecuaciones. Por ejemplo, las derivaciones del esquema Lax-Wendroff para la ecuación de la onda unidimensional y el esquema Crank-Nicolson para la ecuación de convección y la ecuación del calor no requieren cambios cuando lo aplicamos a sistemas de ecuaciones donde se reemplaza a por A y α por B , respectivamente. La principal diferencia está en la prueba para la estabilidad.

En la prueba de estabilidad para esquemas de un paso para sistemas no obtenemos un factor de amplificación escalar, sino un factor de amplificación dada por una matriz G . La *matriz de amplificación* es obtenida haciendo la sustitución de $G^n e^{ij\theta}$ por v_j^n . La condición para la estabilidad es que para cada $T > 0$, existe una constante C_T tal que para $0 \leq nk \leq T$, tenemos

$$\|G^n\| \leq C_T \quad (3.135)$$

Una gran simplificación para ayudar a analizar (3.135) para sistemas hiperbólicos ocurren cuando el esquema tiene G como una función polinomial o racional de la matriz A (e.g. los esquemas de Lax-Wendroff o Crank-Nicolson). Entonces, la misma matriz que diagonaliza la matriz A en (3.135) diagonaliza G , y la estabilidad del esquema depende solo de la estabilidad de las ecuaciones escalares

$$u_t + a_i u_x = 0 \quad (3.136)$$

donde a_i son los autovalores de A . Para el esquema Lax-Wendroff, la condición de estabilidad para (3.133) es $|a_i \lambda| \leq 1$ para $i = 1, \dots, d$.

Similares métodos pueden ser aplicados a sistemas parabólicos, especialmente para esquemas disipativos con α constantes. La matriz que transforma la matriz B en una matriz triangular superior puede también ser usada para convertir G en una matriz triangular superior.

Para cada uno de estos casos, si $G = U \tilde{G} U^{-1}$, entonces $G^n = U \tilde{G}^n U^{-1}$ y así

$$\|G^n\| \leq \|U\| \|U^{-1}\| \|\tilde{G}^n\|. \quad (3.137)$$

Esto implica que la estimación (3.135) será satisfecha para G si una estimativa similar se tiene para \tilde{G} .

Para esquemas generales la situación no es muy buena. Una condición necesaria para la estabilidad es

$$|g_v| = 1 + K\Delta t \quad (3.138)$$

para cada autovalor g_v de G , pero esto no es suficiente en general.

5.0.1 Ejemplo.-

Un ejemplo un poco artificial en el cual la condición (3.138) no es suficiente para la estabilidad es obtenida considerando el sistema

$$\begin{aligned} u_t^1 &= 0 \\ u_t^2 &= 0 \end{aligned}$$

con un esquema de primer orden de precisión

$$\begin{aligned} v_j^{1,n+1} &= v_j^{1,n} - r(v_{j+1}^{2,n} - 2v_j^{2,n} + v_{j-1}^{2,n}) \\ v_j^{2,n+1} &= v_j^{2,n} \end{aligned}$$

La matriz de amplificación es

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 4r \sin^2 \frac{1}{2} \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y así

$$G^n = \begin{pmatrix} 1 & 4nr \sin^2 \frac{1}{2} \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puesto que $\|G^n\|$ para θ igual a π no es acotado, concluimos que el esquema no es estable.

3.6. Implementación numérica

Esta sección está dedicada a la implementación numérica de los esquemas de diferencias finitas para el problema de conducción del calor unidimensional analizado en la sección anterior. Haciendo un estudio comparativo de los esquemas, resolviendo el mismo problema bajo condiciones similares y para los mismos valores de los parámetros.

Para ello utilizamos el problema siguiente

$$(P) \quad \begin{cases} u_t &= \alpha^2 u_{xx}, & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0, t) &= g_1(t), & t > 0 \\ u(L, t) &= g_2(t), & t > 0 \\ u(x, 0) &= u_0(x), & 0 \leq x \leq L \end{cases}$$

Sea $L = 1$ y sea $h = L/N$ el espacio entre puntos de la malla. Como en algunos casos la estabilidad depende de Δx y Δt (el espacio entre los puntos temporales) la implementación se realizará para algunos valores del parámetro $r = \alpha^2 \Delta t / \Delta x^2$

Comenzaremos implementando el esquema implícito de **Euler retrasado**, para ello lo escribimos en la forma

$$-rv_{j-1}^{n+1} + (1+2r)v_j^{n+1} - rv_{j+1}^{n+1} = v_j^n \quad (3.139)$$

Escribiendo (3.139) para $j = 1, \dots, N-1$ aparece un sistema de $N-1$ ecuaciones con $N+1$ incógnitas

$$\begin{aligned} -rv_0^{n+1} + (1+2r)v_1^{n+1} - rv_2^{n+1} &= v_1^n \\ -rv_1^{n+1} + (1+2r)v_2^{n+1} - rv_3^{n+1} &= v_2^n \\ &\vdots \\ -rv_{i-1}^{n+1} + (1+2r)v_i^{n+1} - rv_{i+1}^{n+1} &= v_i^n \\ &\vdots \\ -rv_{N-2}^{n+1} + (1+2r)v_{N-1}^{n+1} - rv_N^{n+1} &= v_{N-1}^n \end{aligned}$$

Observamos que en este sistema de ecuaciones, los valores $-rv_0^{n+1}$ en la ecuación $j = 1$ y $-rv_N^{n+1}$ en la ecuación $j = N-1$ son conocidas, por lo que deberían pasar al lado derecho de la ecuación. Esto hace que el sistema resultante sea cerrado, es decir solo tiene $N-1$ incógnitas, el cual puede ser escrito, para cada n en forma matricial como

$$AU^{n+1} = b^n \quad (3.140)$$

donde A es una matriz tridiagonal de orden $(N-1) \times (N-1)$

$$A = \begin{bmatrix} 1+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 1+2r & -r & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -r & 1+2r & -r \\ 0 & 0 & & & -r & 1+2r \end{bmatrix}$$

mientras que U^{n+1} y b^n son vectores de orden $(N-1) \times 1$

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_i^{n+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{n+1} \\ v_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad y \quad b^n = \begin{bmatrix} v_1^n + rv_0^{n+1} \\ v_2^n \\ \vdots \\ v_i^n \\ \vdots \\ v_{N-2}^n \\ v_{N-1}^n + rv_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema (3.140), se puede utilizar eliminación Gaussiana, así como también factorización *lu*. Para ello consideremos el sistema tridiagonal general de la forma

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & d_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{N-3} & d_{N-2} & c_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-2} & d_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_i^{n+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{n+1} \\ v_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N-2} \\ b_{N-1} \end{bmatrix}$$

de tal manera que sea diagonal dominante, es decir se cumple

$$|d_i| > |c_i| + |a_{i-1}|,$$

El hecho de que una matriz sea diagonal dominante, es suficiente para usar eliminación Gaussiana sin pivotamiento y factorización *lu*. El sistema (3.140) es un sistema diagonal dominante.

La factorización *lu* de la matriz tridiagonal *A* se puede esquematizar en la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & d_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & a_{N-2} & d_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & a_{N-1} & d_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ l_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & l_{N-2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l_{N-1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & u_{N-2} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_N \end{bmatrix}$$

Supongamos que los elementos de la matriz tridiagonal se guardan en tres vectores columnas *d*, *c* y *a*, con los que obtendremos los vectores que conforman las matrices *l* y *u*, entonces el algoritmo para la factorización sería el siguiente:

```
LET      u1 = d1

DO       i = 2 , N

        l(i-1) = a(i-1)/u(i-1)

        u(i) = d(i) - l(i-1)*c(i-1)
```

END DO

Luego se resuelve el sistema, calculando U a partir de l y de u , primeramente se resuelve el sistema triangular

$$lY = B$$

por sustitución progresiva

```

LET      y1 = b1

DO      i = 2 , N

        yi = bi-l(i-1)*y(i-1)

END DO

```

Finalmente, se resuelve el sistema

$$uU = Y$$

por sustitución hacia atrás

```

LET      V(N) = Y(N)/u(N)

DO      i = N-1 , 1

        V(i) = (Y(i)-c(i)*V(i+1))/u(i)

END DO

```

Este proceso es ejecutado para obtener U^{n+1} y se repite para cada nivel el algoritmo para hallar la solución del problema.

A continuación, implementamos el esquema implícito de **Crank-Nicolson**. Para ello, escribimos el esquema en la forma

$$-rv_{j-1}^{n+1} + (2+2r)v_j^{n+1} - rv_{j+1}^{n+1} = rv_{j+1}^n + rv_{j-1}^n + (2-2r)v_j^n \quad (3.141)$$

Observamos que este esquema de diferencias, al igual que el anterior, genera un sistema de $N - 1$ ecuaciones con $N - 1$ incógnitas que puede ser escrito en forma matricial como

$$AU^{n+1} = b^n \quad (3.142)$$

donde A es una matriz tridiagonal de orden $(N - 1) \times (N - 1)$

$$A = \begin{bmatrix} 2+2r & -r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -r & 2+2r & -r & \dots & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \\ & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & -r & 2+2r & -r \\ 0 & 0 & & & -r & 2+2r \end{bmatrix}$$

mientras que U^{n+1} y b^n son vectores de orden $(N - 1) \times 1$

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ \vdots \\ v_i^{n+1} \\ \vdots \\ v_{N-2}^{n+1} \\ v_{N-1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{y}$$

$$b^n = \begin{bmatrix} rv_{-0}^n + (2-2r)v_1^n + rv_2^n + rv_0^{n+1} \\ rv_1^n + (2-2r)v_2^n + rv_3^n \\ \vdots \\ rv_{j-1}^n + (2-2r)v_j^n + rv_{j+1}^n \\ \vdots \\ +rv_{N-3}^n + (2-2r)v_{N-2}^n + rv_{N-1}^n \\ +rv_{N-2}^n + (2-2r)v_{N-1}^n + rv_N^n + rv_N^{n+1} \end{bmatrix}$$

Para resolver el sistema (3.142), se puede seguir los mismos pasos que se hizo al resolver el sistema tridiagonal obtenido por el método de Euler retrasado

La implementación del esquema de **Du Fort-Frankel** es simple porque es un esquema explícito de paso múltiple, por consiguiente, este esquema se ejecutará a partir del segundo nivel de tiempo, necesitando para ello los valores en los niveles $n = 0$ (que es

la condición inicial) y $n = 1$, el cual puede ser obtenido, ejecutando una única vez un esquema de un solo paso, como por ejemplo el esquema de Euler progresivo o (FTCS)

$$v_j^{n+1} = (1 - 2r)v_j^n + r(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n), \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n = 0 \quad (3.143)$$

A continuación, los valores en el nivel $n + 1$ se calculan por la fórmula

$$v_j^{n+1} = \left(\frac{2r}{1+2r} \right) (v_{j+1}^n + v_{j-1}^n) + \left(\frac{1-2r}{1+2r} \right) v_j^{n-1}, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad n \geq 1 \quad (3.144)$$

Presentaremos resultados obtenidos por los tres esquemas en las mismas condiciones, luego se hace una comparación con la solución exacta, a fin de observar sus propiedades presentadas en el análisis teórico. Para ello, consideramos el valor $\alpha = 1$, las condiciones de contorno

$$g_1 = 0 \quad g_2 = 0$$

y la condición inicial

$$u_0(x) = \text{sen}(\pi x), \quad 0 < x < 1$$

cuya solución exacta es conocida

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \text{sen}(\pi x)$$

Esto nos permite calcular el error cometido en la implementación de cada esquema, en el n -ésimo nivel, con la norma $l_{2,\Delta x}$,

$$\|\mathbf{e}_n\|_2^2 = h \sum_{j=0}^N |v_j^n - u_j^n|^2$$

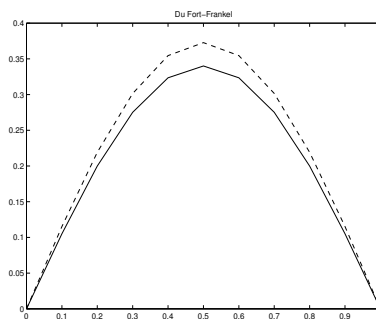
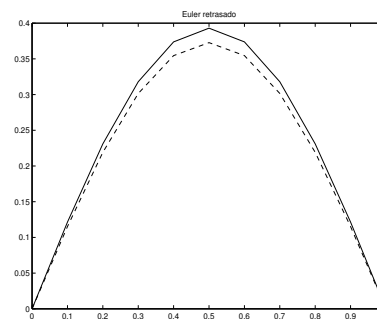
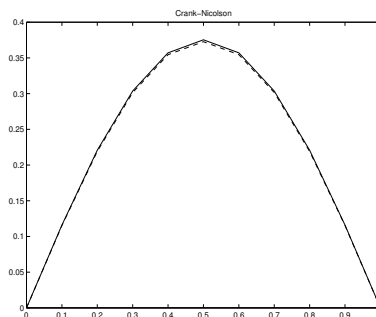
donde $u_j^n = u(jh, nk)$. Hacemos énfasis que solo en este caso, el primer paso del esquema de Du Fort Frankel es calculado con la solución exacta, de esta forma el error que aparece en la siguiente tabla es un error del método mismo, y no de una combinación de dos métodos

También presentaremos resultados para diferentes valores del parámetro r y de allí se obtendrá el valor de $k = h^2/r$ y si fijamos el valor que deseamos alcanzar T , entonces el número total de pasos en el tiempo se calcularán por la fórmula $K_{max} = T/k$.

Por ejemplo, los resultados que se presentan en las figuras (3.23), (3.24) y (3.25), se obtuvieron con $\Delta x = 0.1$, $T = 0.1$, $r = 1$. Observemos que se presentan las soluciones aproximadas comparadas (líneas continuas) con la solución exacta (líneas trazadas), también se presenta el error obtenido en el tiempo T con la norma de l_2 de las funciones

discretas. Es natural observar que el esquema de Crank-Nicolson es más preciso por tener una orden de precisión $(2, 2)$ a diferencia del esquema Euler retrasado que tiene orden de precisión $(1, 2)$, y de Du Fort-Frankel que es de orden $(2, 2)$; pero con la condición de k va para cero mucho mas rápido que h .

Esquema	r	error= $\ e\ _2$
Euler Retrasado	1.0	0.01437
Crank-Nicolson	1.0	0.001933
Du Fort-Frankel	1.0	0.02303

Figura 3.23: *Du Fort-Frankel*Figura 3.24: *BTCS o Euler retrasado*Figura 3.25: *Crank-Nicolson*

3.7. Aplicaciones

Esta sección está dedicada a la presentación de los esquemas de diferencias finitas para el problema de conducción de calor unidimensional analizados en su estabilidad y

consistencia en la sección anterior. Hacemos un estudio comparativo de los esquemas resolviendo el mismo problema bajo condiciones similares y dependencia de los parámetros.

Presentamos resultados obtenidas con los esquemas de diferencias en las mismas condiciones, luego se hace una comparación con la solución exacta, a fin de observar sus propiedades presentadas en el análisis teórico. Para ello, consideramos el siguiente problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= \sin(\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1\end{aligned}$$

cuya solución exacta es conocida

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x).$$

Tomamos los datos $h = 0,1$, $\alpha = 1$ y $r = 1.0$

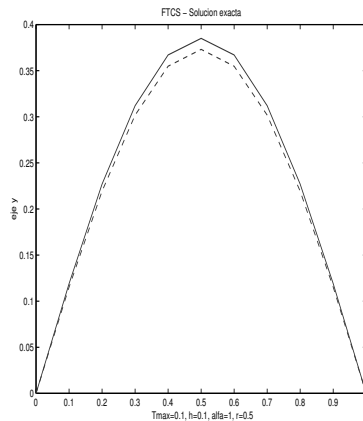


Figura 3.26: $T = 0.1$, $h = 0,1$, $r = 0,5$

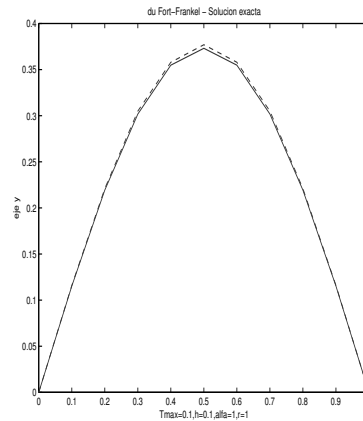
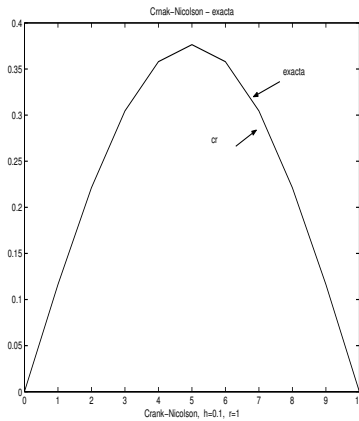


Figura 3.27: $T = 0.1$, $r = 1$

Figura 3.28: $T = 0.1$, $r = 1$

Varios esquemas de diferencias finitas fueron usados para representar la ecuación modelo (3.1) en las secciones previas. Es sumamente importante experimentar con la aplicación de estas técnicas numéricas. Se espera que escribiendo en código de computadora y analizando los resultados, se obtengan visiones adicionales en los procedimientos de solución. Por consiguiente, esta sección propone un ejemplo y soluciones del presente por los varios métodos. Además, animamos a los lectores a desarrollar este tipo de ejemplos desde que uno gana valiosa experiencia escribiendo en código propio en la computadora y superando las dificultades en el proceso.

Como un primer ejemplo, considerar un fluido acotado por dos placas paralelas extendidas al infinito tal que ningún efecto se encuentra en el infinito. Las paredes del plano y el fluido son inicialmente iguales. Ahora, la pared más baja se acelera de repente en la dirección del eje X. Un sistema de coordenadas espacial es seleccionado tal que la pared más baja incluya al plano xz para el cual el eje Y es perpendicular. El espaciamiento entre los dos planos es denotado por L .

Las ecuaciones de Navier-Stokes para este problema pueden expresarse como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.145)$$

donde α es la viscosidad cinemática del fluido. Se requiere computar el perfil de velocidades $u = u(y, t)$. Las condiciones iniciales y de frontera para este problema son como sigue:

(a) *Condiciones iniciales*

$$t=0, \quad u = U_0 \quad \text{para } y = 0$$

$$u = 0 \quad \text{para} \quad 0 < y < L$$

(b) *Condiciones de frontera*

$$\begin{aligned} t \geq 0, \quad u &= U_0 \quad \text{para} \quad y = 0 \\ u &= 0 \quad \text{para} \quad y = L \end{aligned}$$

El fluido es aceite con una viscosidad cinemática de $0.000217 \text{ m}^2/\text{s}$, y el espacio entre los planos es de 40 mm . La velocidad de la pared inferior es especificada como $U_0 = 40 \text{ m/s}$. La solución para la velocidad es obtenida para 1.08 segundos.

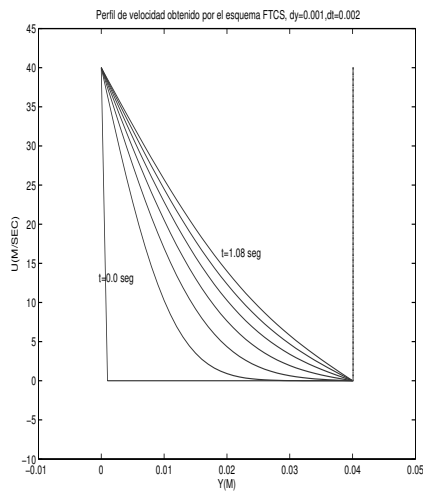


Figura 3.29: FTCS

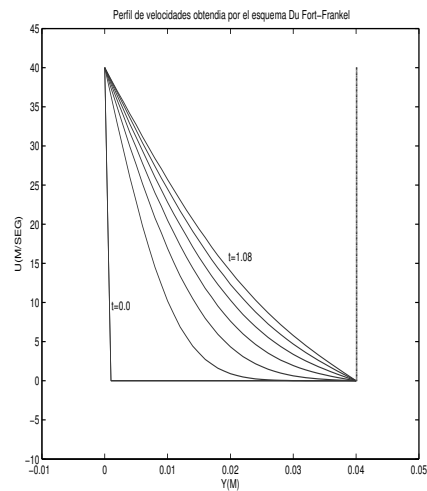


Figura 3.30: Du Fort-Frankel

En las figuras (3.29) y (3.30) se muestran los perfiles de velocidad para la función u .

Otro ejemplo es cuando se tienen fronteras aisladas, donde los extremos de una barra se pueden aislar de modo que el calor no pueda escapar ni entrar por los extremos. Sin embargo, esto conduce a un problema trivial puesto que si la barra inicialmente tiene una temperatura de 100°C grados centígrados y si el calor no puede escapar ni entrar por los extremos o por la superficie, entonces la temperatura ciertamente permanecerá a 100°C grados centígrados todo el tiempo.

Para tener un problema no trivial tendríamos que asumir que la temperatura inicial no es constante. Asumamos por tanto que la barra está aislada en ambos extremos como también en la superficie, pero que la distribución de la temperatura inicial está especificada por alguna función $f(x)$ donde $0 < x < L$.

Formulación matemáticas. Usamos la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

en las fronteras tenemos que la cantidad de calor que atraviesa el extremo $x = 0$ es proporcional a la derivada parcial de la temperatura de u respecto a x en $x = 0$, esto es, $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t)$. Así, si en el extremo $x = 0$, la barra está aislada, significa que ningún calor atraviesa este extremo, de modo que $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$. Similarmente el extremo derecho en $x = L$, la temperatura de la barra está aislada, esto es, $\frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0$.

La condición inicial está dada por la función

$$f(x) = \begin{cases} 60 & , \quad 0 \leq x \leq 50 \\ 40 & , \quad 50 < x \leq 100 \end{cases}$$

La solución exacta obtenida por el método de separación de variables para $\alpha = 0.16$ es

$$u(x, t) = 50 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{40}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} \right\} e^{-16 \cdot 10^{-6} n^2 \pi^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{100}\right) \quad (3.146)$$

CAPÍTULO 4

LA ECUACIÓN DEL TRANSPORTE

4.1. Ley de conservación de masa

Sea $\rho > 0$ la densidad de concentración de un contaminante que se difunde en un medio poroso (porción del espacio ocupada por un material) homogéneo (en el cual la porosidad es independiente donde se calcula su valor) y que es transportado por un fluido a velocidad a . Entonces se cumple la ley de conservación de masa.

Supongamos que un tubo circular delgado de longitud L coincide con el eje X en el intervalo $[0, L]$, además en la sección transversal las propiedades como la concentración de masa y velocidad son constantes. También se supone que el flujo dentro del tubo es solo en la dirección del eje X . Ahora sea $\rho(x, t)$ la densidad de concentración del contaminante en el punto x y en el tiempo t . En la sección transversal, de x_1 a x_2 la masa total está dada por

$$\text{masa en } [x_1, x_2] \text{ en el tiempo } t = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x, t) dx \quad (4.1)$$

Suponiendo además que las paredes del tubo son impermeables y que la masa no se crea ni se destruye, por lo tanto, la masa en el volumen de control puede cambiar únicamente por el flujo de un extremo x_1 y el otro extremo x_2 . Por lo tanto, el flujo de la concentración ρ en el punto (x, t) está dado por

$$\text{flujo de masa en } (x, t) = a(x, t)\rho(x, t) \quad (4.2)$$

donde $a(x, t)$ es la velocidad de concentración. Por lo tanto

$$\text{variación de la masa en } [x_1, x_2] = \text{flujo en } (x_1, t) - \text{flujo en } (x_2, t)$$

es decir

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t) dx = \rho(x_1,t)a(x_1,t) - \rho(x_2,t)a(x_2,t) \quad (4.3)$$

que es la forma integral de la **ley de conservación de masa**.

El lado derecho de (4.3) se puede escribir como

$$- \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t)a(x,t)) dx = \rho(x_1,t)a(x_1,t) - \rho(x_2,t)a(x_2,t) \quad (4.4)$$

llamado *flujo convectivo o adventivo* en el volumen $[x_1, x_2]$.

Luego la ecuación (4.3) se puede escribir como

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dt} \rho(x,t) dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t)a(x,t)) dx = 0 \quad (4.5)$$

de donde

$$\int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{d}{dt} \rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t)a(x,t)) \right\} dx = 0 \quad (4.6)$$

la cual es válida para todo x en el intervalo $[x_1, x_2]$, para $t > 0$. Luego se concluye que el integrando es idénticamente cero, es decir

$$\frac{d}{dt} \rho(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho(x,t)a(x,t)) = 0 \quad (4.7)$$

que es la **forma diferencial de la ley de conservación**.

Si consideramos la velocidad del fluido $a(x,t)$ constante se tiene

$$\frac{d}{dt} \rho(x,t) + a \frac{\partial}{\partial x} \rho(x,t) = 0, \quad (4.8)$$

la cual se conoce con el nombre de **ecuación de convección**.

Si además del flujo convectivo $a(x,t)\rho(x,t)$ consideramos el flujo difusivo como proporcional al gradiente de concentración del contaminante, es decir, se cumple que

$$\text{flujo difusivo} = - \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Usando la ley de Darcy ¹ el flujo se escribe como

$$Q = -\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (4.9)$$

¹El caudal drenado Q volumen por unidad de tiempo es proporcional a una sección transversal A , proporcional a la diferencia de alturas H e inversamente proporcional a la longitud de la sección L , esto es $Q = k \frac{A(h_1 - h_2)}{L}$ donde k conductividad hidráulica. Esta ley se puede expresar en forma diferencial $Q = k \frac{\partial h}{\partial x} dy dz$

donde α es el coeficiente de dispersión. Entonces

$$-\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial(-\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x})}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (4.10)$$

Si además consideramos una fuente generada por absorción (proceso no estacionario, el cual hace crecer o decrecer la cantidad de sustancia disuelta y tiende a nivelar los perfiles de concentración en el medio en movimiento) la concentración del contaminante, la ley de conservación de masa puede ser escrita como *Tasa de cambio de la concentración dentro del volumen de control = flujo convectivo en el volumen de control + flujo difusivo en el volumen de control \pm fuente y sumideros*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + a \frac{\partial \rho}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + g \quad (4.11)$$

Esta ecuación es llamada *ecuación del transporte* como combinación de convección y difusión o también es llamada ecuación de *Burger lineal viscosa*.

En adelante usaremos la notación u en lugar de ρ para tratar problemas más generales.

Enseguida examinaremos en su consistencia, estabilidad y convergencia algunos de los esquemas de diferencias finitas para la ecuación del transporte como son los esquemas *FTCS*, *Upwind*, *Du Fort-Frankel*, *Lax Wendroff* y *Crank-Nicolson*, que fueron investigados previamente para la ecuación de convección y difusión.

4.2. Esquemas explícitos

2.1. Esquema FTCS

Recordar que el esquema FTCS para la ecuación de convección es inestable para todo valor del número de Courant C_r y condicionalmente estable para la ecuación de difusión para los números de difusión $r \leq 0.5$.

Ahora si aplicamos el esquema FTCS a la ecuación del transporte (4.11) tenemos

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} \quad (4.12)$$

el cual, como un algoritmo, puede ser escrito como

$$v_j^{n+1} = (r + 0.5C_r)v_{j-1}^n + (1 - 2r)v_j^n + (r - 0.5C_r)v_{j+1}^n \quad (4.13)$$

$j = 0, \dots, N$, $n = 0, \dots, Tmax$, y $r = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$ $C_r = a \Delta t / \Delta x$. donde la matriz asociada al esquema es

$$\begin{bmatrix} r+0.5C_r & 1-2r & r-0.5C_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r+0.5C_r & 1-2r & r-0.5C_r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r+0.5C_r & 1-2r & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & r-0.5C_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1-2r & r-0.5C_r \end{bmatrix}$$

Si en el problema consideramos condiciones de frontera de Dirichet nulas, entonces la matriz resultante es una matriz tridiagonal de orden $(N-1) \times (N-1)$ de la forma

$$\begin{bmatrix} 1-2r & r-0.5C_r & 0 & \dots & 0 & 0 \\ r+0.5C_r & 1-2r & r-0.5C_r & \dots & 0 & 0 \\ 0 & r+0.5C_r & 1-2r & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1-2r & r-0.5C_r \\ 0 & 0 & 0 & & r+0.5C_r & 1-2r \end{bmatrix}$$

El desarrollo de la serie de Taylor alrededor del nodo (j, n) -ésimo indica que (4.13) es puntualmente consistente con (4.11) con un error de truncamiento de orden $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$. Para probar esto consideremos una función ϕ suficientemente diferenciable y desarrollemos la serie de Taylor de ϕ en el nodo (j, n)

$$\phi_j^{n+1} = \phi_j^n + \Delta t \phi_t + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \phi_{tt} + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (4.14)$$

$$\phi_{j+1}^n = \phi_j^n + \Delta x \phi_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \phi_{xx} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \phi_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (4.15)$$

$$\phi_{j-1}^n = \phi_j^n - \Delta x \phi_x + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \phi_{xx} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \phi_{xxx} + \mathcal{O}(\Delta x)^4. \quad (4.16)$$

Reemplazando (4.14), (4.15) y (4.16) en (4.13) obtenemos el operador discreto evaluado en el nodo (j, n)

$$L_j^n \phi = \phi_t + \mathcal{O}(\Delta t) + a \phi_x + \mathcal{O}(\Delta x)^2 - \alpha \phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 \quad (4.17)$$

y el operador diferencial continuo es de la forma

$$L\phi = \phi_t + a\phi_x - \alpha\phi_{xx}. \quad (4.18)$$

De (4.17) y (4.18) obtenemos que

$$L\phi_j^n - L_j^n\phi = \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2.$$

Por lo tanto

$$L\phi_j^n - L_j^n\phi \rightarrow 0, \quad \Delta x, \Delta t \rightarrow 0.$$

Aplicamos el análisis de Fourier para determinar la estabilidad de esquema FTCS. Para ello consideramos la transformada inversa de Fourier discreta para v_j^n , v_{j-1}^n y v_{j+1}^n

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ij\theta} \hat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.19)$$

$$v_{j-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j-1)\theta} \hat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.20)$$

$$v_{j+1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j+1)\theta} \hat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.21)$$

Ahora reemplazamos (4.19), (4.20) y (4.21) en (4.13)

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} [(r + 0.5 C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r) + (r - 0.5 C_r) e^{i\theta}] e^{ij\theta} \hat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.22)$$

Comparando esta fórmula con la fórmula de la transformada inversa discreta para v^{n+1}

$$v^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ij\theta} \hat{v}^{n+1}(\xi) d\xi \quad (4.23)$$

y usando el hecho que la transformada de Fourier es única, deducimos que el integrando de (4.22) es el mismo que el de la transformada inversa (4.23). Así tenemos que

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) = [(r + 0.5 C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r) + (r - 0.5 C_r) e^{i\theta}] \hat{v}^n(\xi) \quad (4.24)$$

lo cual se puede expresar como

$$\hat{v}^{n+1}(\xi) = g(\theta) \hat{v}^n \quad (4.25)$$

donde

$$g(\theta) = (r + 0.5 C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r) + (r - 0.5 C_r) e^{i\theta}$$

Aplicando la fórmula de Euler se tiene el factor de amplificación

$$g = 1 - 2r(1 - \cos \theta) - iC_r \sin \theta. \quad (4.26)$$

Observar que el método de Fourier es equivalente a reemplazar v_j^n por la expresión $g^n e^{ij\theta}$, lo cual es conocido con el nombre de *análisis de estabilidad de von Neumann*.

Para tener una idea gráfica del comportamiento de los valores que toma el factor de amplificación (4.26), lo parametrizamos en la forma

$$\begin{cases} x = 1 - 2r(1 - \cos \theta) \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases} \quad (4.27)$$

Es así que (4.27) se puede escribir en la forma

$$\frac{(x - (1 - 2r))^2}{(2r)^2} + \frac{y^2}{C_r^2} = 1 \quad (4.28)$$

la cual es una elipse de centro $(1 - 2r, 0)$ y semiejes $2r$ y C_r . Observe que el factor de amplificación (4.26) tiene parte real y parte imaginaria, entonces se requiere que el módulo del factor de amplificación sea acotado para tener soluciones estables, es decir, se debe tener que

$$|g|^2 \leq 1 \quad (4.29)$$

En efecto

$$\begin{aligned} |g|^2 &= g\bar{g} \\ &= (1 - 2r(1 - \cos \theta))^2 + (C_r \sin \theta)^2 \\ &= 1 - 4r(1 - \cos \theta) + 4r^2(1 - \cos \theta)^2 + C_r^2 \sin^2 \theta \\ &= (4r^2 - C_r^2) \cos^2 \theta + 4r(1 - 2r) \cos \theta + 4r(r - 1) + C_r^2 + 1 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$|g|^2 = (4r^2 - C_r^2) \cos^2 \theta + 4r(1 - 2r) \cos \theta + 4r(r - 1) + C_r^2 + 1 \quad (4.30)$$

Esta última ecuación es cuadrática en la variable $\cos \theta$ y representa una curva convexa con un mínimo o una curva cóncava con un máximo.

Se puede demostrar que para tener una solución estable la función cuadrática $|g|^2$ no puede tener máximo global, es decir, la curva no puede ser cóncava. El procedimiento matemático para demostrar esto es como sigue.

Calculamos la primera derivada

$$\frac{d|g|^2}{d(\cos \theta)} = (4r^2 - C_r^2)(2 \cos \theta) + 4r(1 - 2r) \quad (4.31)$$

y la segunda derivada

$$\frac{d^2|g|^2}{d(\cos \theta)^2} = 2(4r^2 - C_r^2) \quad (4.32)$$

para que la función $|g|^2$ tenga un máximo la segunda derivada tiene que ser negativa, es decir,

$$2(4r^2 - C_r^2) < 0$$

Igualando a cero la ecuación (4.31) obtenemos los puntos críticos

$$\cos \theta = -\frac{2r(1 - 2r)}{4r^2 - C_r^2}$$

Reemplazando en (4.30) obtenemos el valor máximo

$$|g|_{\max}^2 = \frac{C_r^2(C_r^2 - 4r + 1)}{C_r^2 - 4r^2}$$

Requerimos que el valor máximo de $|g|_{\max}^2$ debe ser menor que uno, es decir,

$$|g|_{\max}^2 \leq 1$$

para que no salga de la región de estabilidad, con lo cual se obtiene que

$$(C_r^2 - 2r)^2 \leq 0 \quad (4.33)$$

Puesto que $(C_r^2 - 2r)^2$ es siempre una cantidad positiva, la condición de estabilidad no puede cumplirse; y la función cuadrática representada por (4.30) la cual corresponde a una curva cóncava, no es posible que sea alcanzada. Es decir, $|g|_{\max}^2 > 1$. Concluimos que la función $|g|^2$ no es cóncava, pues si lo fuera tendría un valor mayor que uno.

Así se muestra que para una función cóncava donde

$$\frac{d^2|g|^2}{d(\cos \theta)^2} = 2(4r^2 - C_r^2) < 0$$

Una solución inestable se desarrollará debido al requerimiento que

$$(C_r^2 - 2r)^2 \leq 0$$

Así, la condición para la inestabilidad como puede verse en la figura (4.1) es

$$C_r^2 > 2r \quad (4.34)$$

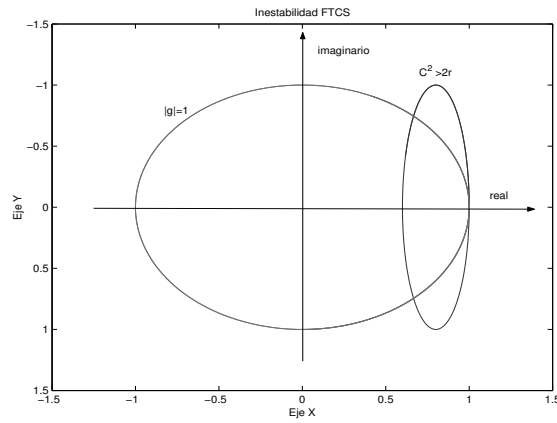


Figura 4.1: Condición de inestabilidad FTCS

Por lo tanto, si la función cuadrática es convexa, la condición para la estabilidad está dada por

$$C_r^2 \leq 2r \quad (4.35)$$

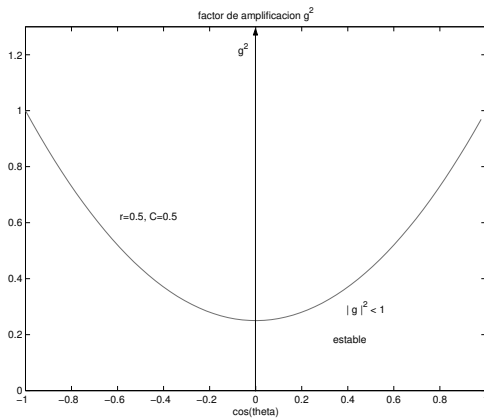


Figura 4.2: Función convexa FTCS

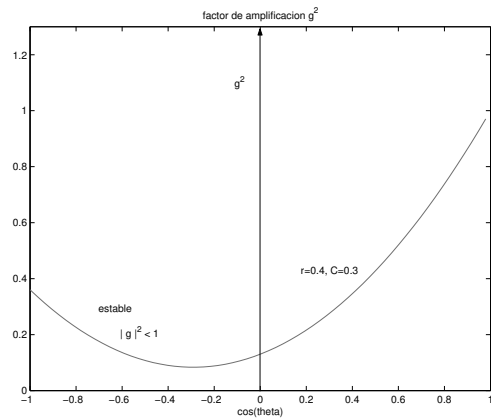


Figura 4.3: Condición-estabilidad FTCS

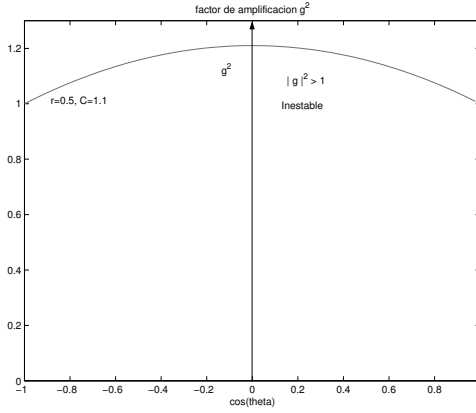


Figura 4.4: Función cóncava FTCS

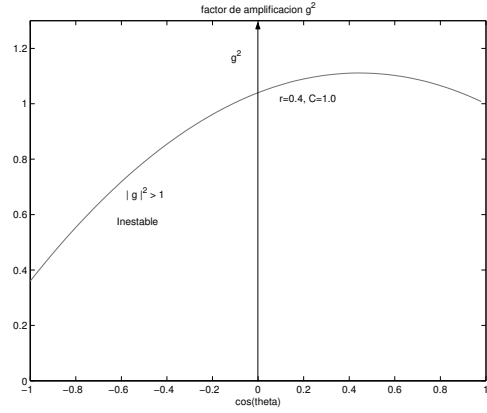


Figura 4.5: Condición-inestabilidad FTC

La condición requerida puede ser expresada en términos del tamaño de paso como

$$\begin{aligned} \left(a \frac{\Delta t}{\Delta x}\right) C_r &\leq 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ a C_r &\leq 2\alpha \frac{1}{\Delta x} \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} a \frac{\Delta x}{\alpha} &\leq \frac{2}{C_r} \\ Re &\leq \frac{2}{C_r} \end{aligned}$$

donde el número de Reynolds es $Re = a \frac{\Delta x}{\alpha}$. Además, los extremos de $\cos \theta$ es ± 1 necesitan ser considerados. De la ecuación (4.30), si $\cos \theta = -1$ tenemos

$$|g|^2 = 16r^2 - 8r + 1 \leq 1 \quad (4.36)$$

o

$$8r(2r - 1) \leq 0 \quad (4.37)$$

Así, $2r - 1 \leq 0$ ó $r \leq 0.5$

Finalmente, concluimos que las condiciones para la estabilidad son

$$r \leq 0.5 \text{ o } Re \leq \frac{2}{C_r} \quad (4.38)$$

Note que la condición $C_r \leq 1$, la cuál fue indicada por la consideración gráfica, es automáticamente satisfecha por éstas dos condiciones y es fácilmente probada como sigue. Recordar que el requerimiento para la estabilidad es

$$\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5 \text{ y } a \frac{\Delta x}{\alpha} \leq \frac{2}{C_r} \quad (4.39)$$

multiplicando las dos condiciones obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) \left(a \frac{\Delta x}{\alpha} \right) &\leq \frac{1}{2} \frac{2}{C_r} \\ a \frac{\Delta t}{\Delta x} &\leq \frac{1}{C_r} \end{aligned}$$

Por lo tanto $C_r \leq 1$.

Finalmente, podemos comparar el rango de estabilidad en el plano (r, C_r) para el esquema FTCS el cual es esquematizado en la figura (4.6)

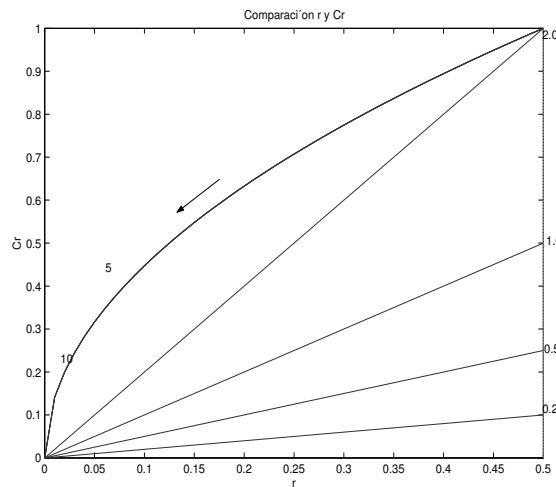


Figura 4.6: Estabilidad FTCS, (r, C_r)

El número adimensional de Peclet, Pe_Δ , que aparece en la figura (4.6), se define como $Pe_\Delta = |a| \frac{\Delta x}{\alpha}$ o $Pe_\Delta = \frac{C_r}{r}$ que como observamos para tener estabilidad debe ser menor que 2. Observe que para $r = 0$, corresponde al caso de convección pura, el esquema FTCS es inestable para todo C_r y θ .

En la figura (4.7) se muestra el factor de amplificación (4.26) para los parámetros C_r y r . Para un $C_r = 0.5$ fijo variamos r con valores de 0.2, 0.3, 0.4, 0.5 y observamos que

las curvas generadas por el factor de amplificación (4.26) caen dentro de la región de estabilidad $|g|^2 \leq 1$, esto es, la condición (??) se cumple. Para $Cr = 0.5$ y $r = 0.6$ la curva generada por (4.26) sale fuera de la región de estabilidad, esto hace que el esquema FTCS se inestable para estos valores.

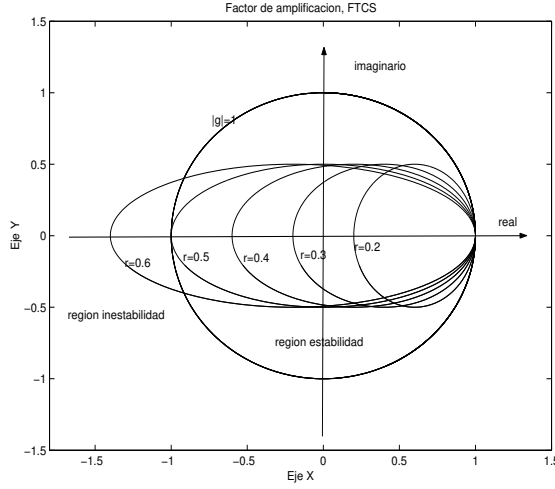


Figura 4.7: Factor-amplificación FTCS

2.2. Esquema Upwind

Este esquema es la unión del esquema Upwind para la ecuación de convección con $Cr \leq 1$ como condición de estabilidad y el esquema FTCS para la ecuación de difusión con condición de estabilidad $r \leq 0.5$.

Si aplicamos el esquema Upwind a la ecuación (4.11), obtenemos la ecuación algebraica

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{\Delta x} = \alpha \frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.40)$$

Reescribiendo (4.40) en su forma de algoritmo se obtiene

$$v_j^{n+1} = (r + Cr)v_{j-1}^n + (1 - 2r - Cr)v_j^n + rv_{j+1}^n \quad (4.41)$$

donde $r = \alpha \Delta t / (\Delta x)^2$ y $Cr = a \Delta t / \Delta x$.

Para probar la consistencia puntual del esquema (4.40) respecto a (4.11), desarrollaremos la serie de Taylor de la función diferenciable ϕ en el nodo (x_j, t_n) y obtenemos el operador discreto

$$L_j^n \phi = \phi_t + a\phi_x - \alpha\phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2. \quad (4.42)$$

En tanto que el operador continuo es de la forma

$$L\phi = \phi_t + a\phi_x - \alpha\phi_{xx}. \quad (4.43)$$

De (4.42) y (4.43) tenemos que

$$L\phi|_j^n - L_j^n\phi \rightarrow 0, \quad \Delta t, \Delta x \rightarrow 0.$$

El esquema Upwind, por lo tanto, es puntualmente consistente con (4.11) con un error de truncamiento $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta x)^2$.

Para determinar la estabilidad aplicamos el análisis de Fourier. Para ello consideramos la transformada inversa de Fourier discreta para v_j^n , v_{j-1}^n y v_{j+1}^n

$$v_j^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ij\theta} \widehat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.44)$$

$$v_{j-1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j-1)\theta} \widehat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.45)$$

$$v_{j+1}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{i(j+1)\theta} \widehat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.46)$$

Ahora reemplazamos (4.44), (4.45) y (4.46) en (4.41)

$$v_j^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} [(r + C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r - C_r) + r e^{i\theta}] e^{ij\theta} \widehat{v}_j^n(\xi) d\xi \quad (4.47)$$

Comparando esta fórmula con la fórmula de la transformada inversa discreta para v^{n+1}

$$v^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ij\theta} \widehat{v}^{n+1}(\xi) d\xi \quad (4.48)$$

y usando el hecho que la transformada de Fourier es única, deducimos que el integrando de (4.47) y (4.48) son iguales. Así tenemos que

$$\widehat{v}^{n+1}(\xi) = [(r + C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r - C_r) + r e^{i\theta}] \widehat{v}^n(\xi) \quad (4.49)$$

lo cual se puede expresar como

$$\widehat{v}^{n+1}(\xi) = g(\theta) \widehat{v}^n \quad (4.50)$$

donde el factor de amplificación es

$$g(\theta) = (r + C_r) e^{-i\theta} + (1 - 2r - C_r) + r e^{i\theta} \quad (4.51)$$

La fórmula (4.50) muestra que la ventaja de la solución del esquema para un paso de tiempo es equivalente a multiplicar la transformada de Fourier de la solución por un factor de amplificación $g(\theta)$. El factor de amplificación es llamado así porque su magnitud es el valor de la amplitud de cada frecuencia en la solución, dada por \hat{v}^n y es amplificado en un avance de la solución sobre el paso del tiempo para obtener

$$\hat{v}^n(\xi) = [g(\theta)]^n \hat{v}^0 \quad (4.52)$$

El significado de la transformada de Fourier es que todo esquema de un paso puede ser puesto en la forma (4.52). Usamos esta representación de esquemas para estudiar su estabilidad y orden de aproximación. El uso de la transformada de Fourier provee un método estándar para estudiar una gran variedad de esquemas, donde el factor de amplificación del esquema contiene toda la información acerca del esquema y, como veremos, es fácil extraer información importante del esquema.

La fórmula (4.51) es llamado *factor de amplificación* del esquema Upwind, el cual puede ser escrito como

$$g = 1 - (C_r + 2r)(1 - \cos \theta) - i C_r \sin \theta \quad (4.53)$$

En adelante podemos simplificar este procedimiento y solo reemplazar v_j^n por $g^n e^{ij\theta}$, lo cual se conoce con el nombre de análisis de estabilidad de von Neumann.

Para tener una idea geométrica del comportamiento del factor de amplificación (4.53) lo podemos parametrizar en la forma

$$\begin{cases} x = 1 - (C_r + 2r)(1 - \cos \theta) \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases} \quad (4.54)$$

la cual genera la elipse

$$\frac{(x - (1 - 2r - C_r))^2}{(2r + C_r)^2} + \frac{y^2}{C_r^2} = 1 \quad (4.55)$$

de centro $(1 - 2r - C_r, 0)$ y semiejes $2r + C_r$ y C_r .

Se puede observar que para tener soluciones estables el módulo del factor de amplificación (4.53) debe ser menor que uno, lo cual implica que

$$C_r + 2r \leq 1. \quad (4.56)$$

En la figura (4.8) variamos los parámetros C_r y r . Para un $C_r = 0.5$ y $r = 0.2$ vemos que la curva generada por el factor de amplificación (4.53) se encuentra dentro de la región de estabilidad de von Neumann, esto es, se cumple la condición (4.56). Para $C_r = 0.5$ y

$r = 0.3, 0.4, 0.5$ las curvas caen fuera de la región de estabilidad, esto es, la condición de estabilidad (4.56) no se cumple.

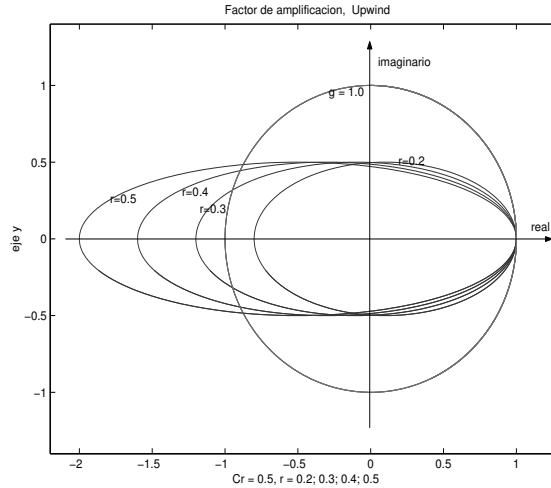


Figura 4.8: Factor-amplificación Upwind

Si una expresión de diferencia central en el tiempo es combinada con una expresión de diferencia central espacial para representar (4.11), el resultado es el esquema Leapfrog

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.57)$$

el cual es *incondicionalmente inestable*.

2.3. Esquema Du Fort-Frankel

Si en el esquema Leapfrog reemplazamos $-2v_j^n = v_j^{n+1} + v_j^{n-1}$ obtenemos el esquema Du Fort-Frankel para la ecuación de transporte (4.11), tenemos

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - (v_j^{n-1} + v_j^{n+1}) + v_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (4.58)$$

o en forma de algoritmo

$$v_j^{n+1} = v_j^{n-1} - Cr(v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + 2r(v_{j+1}^n - (v_j^{n-1} + v_j^{n+1}) + v_{j-1}^n) \quad (4.59)$$

El esquema (4.58) es la unión del esquema neutralmente estable Leapfrog para la ecuación de convección y el esquema estable Du Fort-Frankel para la ecuación de difusión.

Para probar la consistencia puntual del esquema (4.11) aplicamos Taylor alrededor del nodo (j, n) -ésimo para la función discreta v , esto es, $v(j\Delta x, n\Delta t)$ la y denotamos por v_j^n ,

$$v_j^{n+1} = v_j^n + (\Delta t) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (4.60)$$

de donde obtenemos la aproximación para la primera derivada temporal

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} (\Delta t) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{1}{3!} (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t)^3 \quad (4.61)$$

Desarrollamos la serie de Taylor alrededor del nodo (j, n) para la función v con un incremento de Δx

$$v_{j+1}^n = v_j^n + (\Delta x) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (4.62)$$

$$v_{j-1}^n = v_j^n - (\Delta x) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x)^4 \quad (4.63)$$

obtenemos la aproximación para la primera derivada espacial en diferencias centrales

$$\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{3!} (\Delta x)^2 \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta x)^3 \quad (4.64)$$

Ahora la serie de Taylor para la función v en el nodo (j, n) con un incremento de $\Delta t < 0$

$$v_j^{n-1} = v_j^n - (\Delta t) \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2!} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{(\Delta t)^3}{3!} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3} + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (4.65)$$

sumando (4.60) y (4.65)

$$v_j^{n+1} + v_j^{n-1} = 2v_j^n + (\Delta t)^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \mathcal{O}(\Delta t)^4 \quad (4.66)$$

Ahora reemplazamos (4.61), (4.64) y (4.66) en (4.58) para obtener el operador diferencial discreto evaluado en el nodo (j, n)

$$L_j^n v = \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta t) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}\right) \quad (4.67)$$

Aplicamos la definición de consistencia con el operador continuo

$$L = \frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} - \alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (4.68)$$

tenemos

$$Lv_j^n - L_j^n v = \mathcal{O}(\Delta x)^2 + \mathcal{O}(\Delta t) + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^4}{\Delta x^4}\right) \quad (4.69)$$

para asegurar la consistencia tenemos que asegurar que $\Delta t \leq \Delta x$ ($C_r^2 < 1$), entonces

$$Lv_j^n - L_j^n v \rightarrow 0, \Delta x, \Delta t \rightarrow 0 \quad (4.70)$$

Para analizar la estabilidad del esquema Du Fort-Frankel reemplazamos $g^n e^{ij^n}$ en v_j^n para la ecuación de diferencias (4.59)

$$(1 + 2r)g^2 + (2C_r \sin \theta i - 4r \cos \theta)g + (2r - 1) = 0 \quad (4.71)$$

para obtener el factor de amplificación

$$g = \frac{\beta \pm [\beta^2 - 4(4r^2 - 1)]^{1/2}}{2(1 + 2r)} \quad (4.72)$$

donde $\beta = 4r \cos \theta - 2iC_r \sin \theta$, para cualquier valor de θ .

Para analizar la estabilidad del esquema (4.59) se debe tener $|g|^2 < 1$, la cual por una experiencia computacional se demuestra que $C_r \leq 1$ no existiendo restricciones para r .

En la figura (4.9) tenemos el factor de amplificación (4.72) que para los valores de $r = 0.5$ fijo variamos C_r para 0.2 y 0.5. Sus valores caen dentro en la región de estabilidad y para el número de Courant $C_r = 1.2$ los valores caen fuera de la región de estabilidad $|g|^2 < 1$.

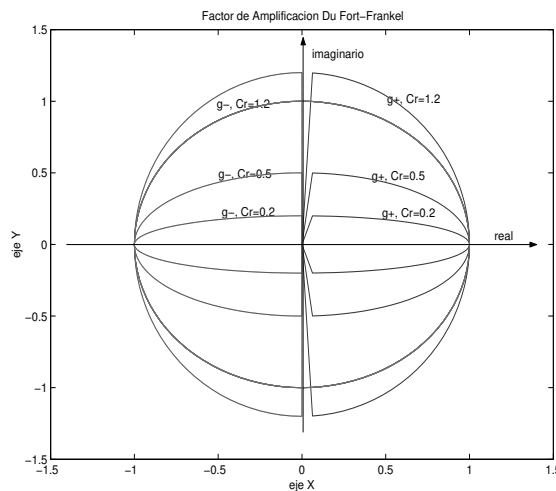


Figura 4.9: *Factor-Du Fort-Frankel*

2.4. Esquema Lax-Wendroff

Tenemos el esquema Lax-Wendroff para la ecuación de convección

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} - a^2 \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) = 0 \quad (4.73)$$

y el esquema FTCS para la ecuación de difusión

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} = \alpha \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (4.74)$$

Entonces el esquema Lax-Wendroff para la ecuación del transporte (4.11) está dado por la unión de los esquemas (4.73) y (??).

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} = \alpha^* \frac{v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n}{\Delta x^2} \quad (4.75)$$

Escribiendo (4.75) en su forma de algoritmo para la implementación

$$\begin{aligned} v_j^{n+1} = & (r^* + 0.5C_r)v_{j-1}^n + (1 - 2r^*)v_j^n \\ & + (r^* - 0.5C_r)v_{j+1}^n \end{aligned} \quad (4.76)$$

donde $C_r = a\Delta t/\Delta x$, $r^* = \alpha^*\Delta t/\Delta x^2$.

Si desarrollamos la serie de Taylor para un función diferenciable v en el nodo (j, n) -ésimo se determina que el esquema (4.75) es consistente con (4.11) con un error de truncamiento de orden $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$.

Para analizar la estabilidad aplicamos el criterio de estabilidad de von Neumann a (4.76), es decir, cambiamos v_j^n por $g^n e^{ij\theta}$ en (4.76) para obtener

$$g = (r^* + 0.5C_r)e^{-i\theta} + (1 - 2r^*) + (r^* - 0.5C_r)e^{i\theta} \quad (4.77)$$

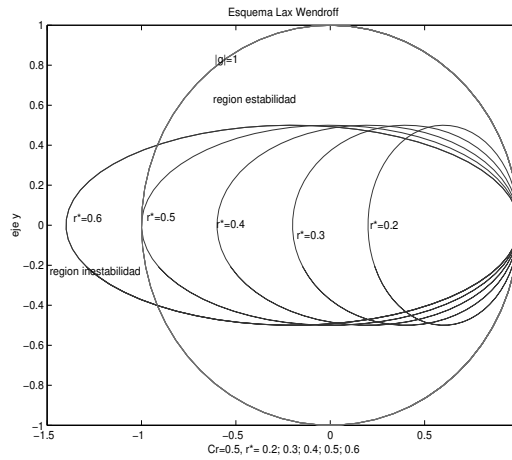
tal que el factor de amplificación está dado por

$$g = 1 - 2r^*(1 - \cos \theta) - iC_r \sin \theta \quad (4.78)$$

La ecuación (4.78) es el factor de amplificación de (4.75).

Para visualizar el factor de amplificación (4.78) lo parametrizamos en la forma

$$\begin{cases} x = 1 - 2r^*(1 - \cos \theta) \\ y = -C_r \sin \theta \end{cases} \quad (4.79)$$

Figura 4.10: *Factor-Lax Wendroff*

Equivalentemente (4.79) se puede escribir en la forma

$$\frac{(x - (1 - 2r^*))^2}{(2r^*)^2} + \frac{y^2}{C_r^2} = 1 \quad (4.80)$$

la cual es una elipse de centro $(1 - 2r^*, 0)$ y semiejes $2r^*$ y C_r .

Para que la soluciones de (4.75) se encuentren en la región de estabilidad, $|g|^2 \leq 1$, se debe tener que

$$0 \leq C_r^2 \leq 2r^* \leq 1. \quad (4.81)$$

La figura (4.10) muestra el factor de amplificación para el esquema Lax-Wendroff. Si tomamos los valores $C_r = 0.5$ y $r^* = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ vemos que el factor de amplificación se encuentra dentro de la región de estabilidad $|g|^2 \leq 1$ es decir se cumple (4.81), mientras que para $C_r = 0.5$ y $r^* = 0.6$ la condición (4.81) no se cumple.

4.3. Esquemas implícitos

Para la ecuación de difusión los esquemas implícitos son efectivos para remover la restricción de estabilidad $r \leq 0.5$. Aquí el más efectivo esquema de dos niveles unidimensional para la ecuación de difusión es el esquema de Crank-Nicolson que será aplicado a la ecuación del transporte (4.11).

3.1. Esquema de Crank-Nicolson

Para la ecuación de transporte el esquema Crank-Nicolson es de la forma

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + 0.5a \left(\frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2\Delta x} + \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right) \\ = 0.5\alpha \left(\frac{v_{j-1}^n - 2v_j^n + v_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{j-1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} \right) \end{aligned} \quad (4.82)$$

el cual es la unión de los esquemas de Crank-Nicolson para las ecuaciones de difusión (3.115) y convección (2.101) vistas anteriormente.

El esquema (4.82) puede ser escrito como un algoritmo

$$\begin{aligned} - (r + 0.5C_r)v_{j-1}^{n+1} + 2(1+r)v_j^{n+1} - (r - 0.5C_r)v_{j+1}^{n+1} \\ = (r + 0.5C_r)v_{j-1}^n + 2(1-r)v_j^n + (r - 0.5C_r)v_{j+1}^n. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Para probar la consistencia de (4.83) se considera una función ϕ lo suficientemente diferenciable. Entonces hallamos los valores $\phi(x_{j-1}, t_n)$, $\phi(x_j, t_n)$, $\phi(x_{j+1}, t_n)$, $\phi(x_{j-1}, t_{n+1})$, $\phi(x_j, t_{n+1})$ y $\phi(x_{j+1}, t_{n+1})$ en el nodo $(x_j, t_{n+1/2})$. Entonces utilizando la serie de Taylor llegamos a determinar el operador diferencial discreto asociado a (4.82)

$$L_j^n \phi = \phi_t + a\phi_x - \alpha\phi_{xx} + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.84)$$

y el operador diferencial continuo asociado a (4.11) es de la forma

$$L\phi = \phi_t + a\phi_x - \alpha\phi_{xx}. \quad (4.85)$$

Así que

$$L_j^n \phi - L_j^n \phi = \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta x^2) \quad (4.86)$$

tal que

$$L_j^n \phi - L\phi_j^n \rightarrow 0 \quad \Delta t, \Delta x \rightarrow 0$$

Por lo tanto, el esquema de Crank-Nicolson (4.82) es consistente con la ecuación (4.11), con un orden de truncamiento local $\mathcal{O}(\Delta t^2, \Delta x^2)$.

Para probar la estabilidad del esquema (4.82) aplicamos el análisis de estabilidad de von Neumann a (4.83) dando el factor de amplificación

$$g = \frac{1 - r(1 - \cos \theta) - 0.5 i C_r \sin \theta}{1 + r(1 - \cos \theta) + 0.5 i C_r \sin \theta} \quad (4.87)$$

sin restricciones para C_r y r .

Para analizar el comportamiento del factor de amplificación (4.87) se puede escribir en forma paramétrica

$$\begin{cases} x = \frac{1 - A^2 - B^2}{(1 + A)^2 + B^2} \\ y = -\frac{2B}{(1 + A)^2 + B^2} \end{cases} \quad (4.88)$$

donde $A = r(1 - \cos \theta)$, $B = 0.5 C_r \sin \theta$.

El sistema (4.88) representa curvas (elipses para $r = 0.5$) que se encuentran siempre en el interior de la región de estabilidad $|g|^2 \leq 1$, esto es, el esquema es incondicionalmente estable.

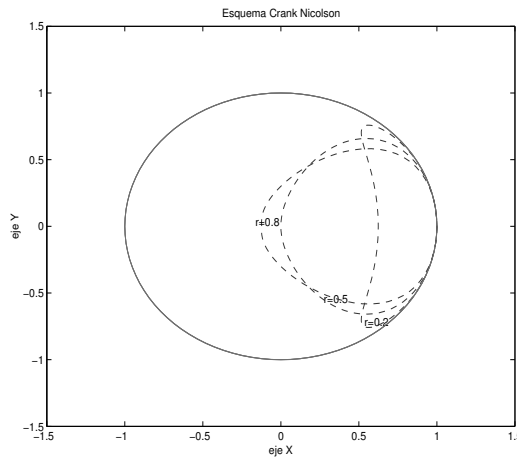


Figura 4.11: *Factor-amplificación Crank-Nicolson*

4.4. Resultados numéricos

En esta sección presentamos los esquemas de diferencias descritos en las secciones anteriores aplicados al problema de transmisión de una fuente de temperatura con una velocidad \mathbf{a} a través de un fluido de difusividad termal α .

Los esquemas de diferencias FTCS, Du Fort-Frankel, Upwind, Lax-Wendroff y Crank-Nicolson son aplicados al problema de propagación de una fuente de temperatura, figura (4.12)

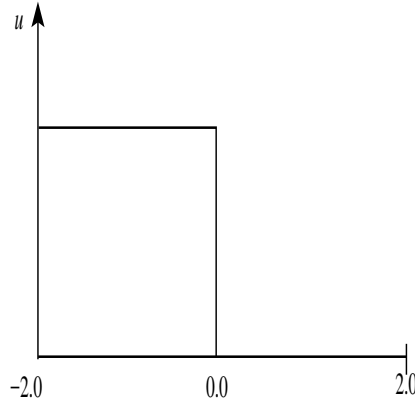


Figura 4.12: Condición inicial para la propagación de una fuente de temperatura

En $t = 0$ una forma puntiaguda es localizada en $x = 0$. Para los tiempos siguientes la forma delantera viaja a la derecha con una velocidad a y su perfil pierde su forma original bajo la influencia de la difusividad térmica α .

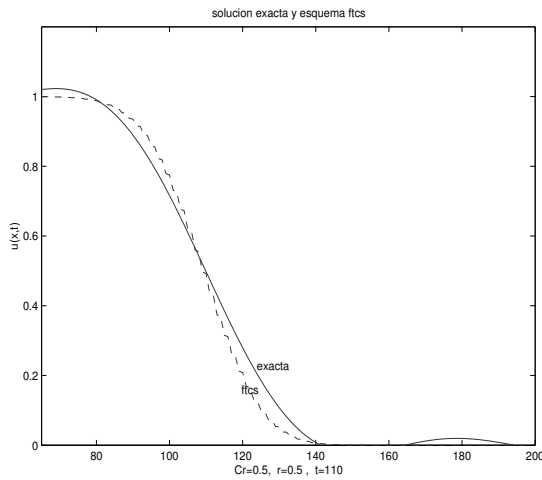
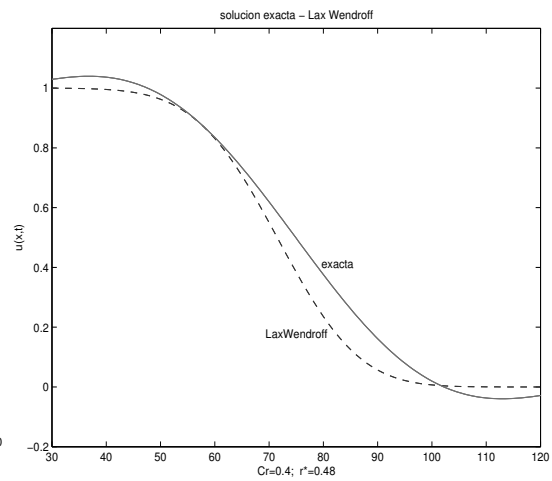
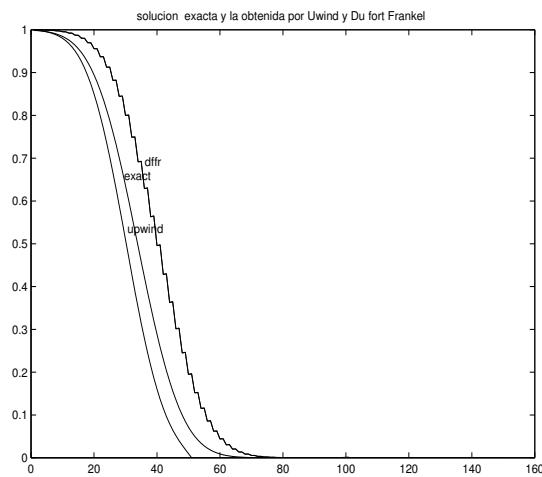
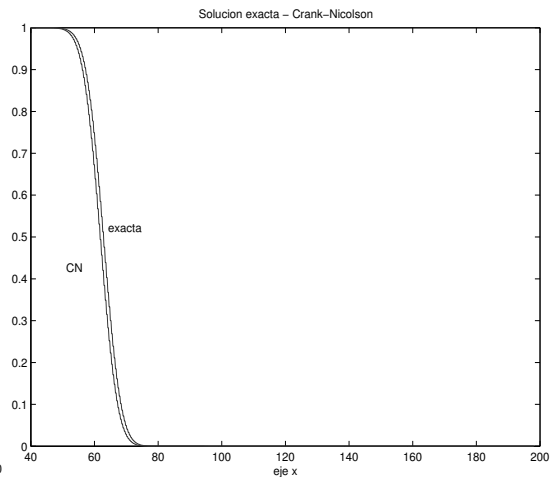
Las ecuaciones que gobiernan este problema están dadas por (4.11). Para valores suficientemente pequeños de tiempo Δt definimos las siguientes condiciones de frontera

$$u(-2, t) = 1.0, \quad u(2, t) = 0.$$

La solución exacta obtenida por la técnica de separación de variables es

$$u(x, t) = 0.5 - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \sin \left[(2k-1) \frac{\pi(x-at)}{L} \right] \frac{\exp[-\alpha(2k-1)^2 \pi^2 t / L^2]}{2k-1} \quad (4.89)$$

Hacemos una comparación entre los esquemas discutidos en la sección anterior resolviendo el mismo problema bajo condiciones similares y dependencia de parámetros.

Figura 4.13: *Exacta-FTCS*Figura 4.14: *Exacta-Lax-Wendroff*Figura 4.15: *Exacta, Upwind, Du Fort-Frankel*Figura 4.16: *Exacta-Crank-Nicolson*

Presentamos el problema del transporte de contaminantes a través de un medio poroso homogéneo, transportando los contaminantes por efecto de la velocidad del flujo a y posteriormente se difunde según el coeficiente de dispersión térmica α .

Los esquemas de diferencias finitas FTCS, Upwind, Du Fort-Frankel y Crank-Nicolson se utilizaron para resolver el problema de transporte de contaminante a través de un medio poroso.

La ecuación que gobierna este problema está dada por

$$(1 + \bar{k})\rho_t + a\rho_x = \alpha\rho_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (4.90)$$

$$\rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad 0 < x < L \quad (4.91)$$

$$\rho(0, t) = \rho(L, t) = 0, \quad t > 0 \quad (4.92)$$

Se presentan las gráficas de las soluciones aproximadas para los diferentes esquemas estudiados para los valores $L = 1$ longitud del intervalo; $a = 1$ velocidad del fluido efectiva, $\alpha = 0.001$ difusión molecular y $\bar{k} = 4.3^2$. Además el perfil de concentración del contaminante en el instante inicial $t = 0$ seg está dada por

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0 \\ 0, & \text{otro lugar} \end{cases}$$

$^2\bar{k} = \frac{\rho_b}{n}$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Mark H. Holmes *Introduction to numerical methods in differential equations*. Edit. Springer, USA, 2007
- [2] Angirasa, D., Eggles, J. and Nieuwstadt, F. *Numerical Simulation of Transient Natural Convection form an Isothermal Cavity Open on a Side*, Numerical Heat Transfer, Part A., **28**, 755-768, 1995.
- [3] Bejan, A. *Convection Heat Transfer*. Edit. Fourth, Jhon Wiley & Sons. Inc. USA. 2013.
- [4] Duchateau, P. and Zachmann, D. *Ecuaciones Diferenciales Parciales, Teoría y Problemas*, McGraw-Hill, Mexico 1998.
- [5] Evans, G., Blackledge, J. and Yardley, P. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Edit. Springer-Verlag. London, 2000.
- [6] Fletcher, C. *Computational Techniques for Fluid Dynamics I*. Springer-Verlag, Sydney, 1990.
- [7] Gonzales, C. *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería*. Edit. Alfaomega colombiana, 2016.
- [8] Gustafsson, B ; Kreiss, H. & Oliger, Joseph *Time Dependent Problems and Difference Methods* Wiley-Interscience Publication. Jhon wiley & Sons, INC; New York; 1995.
- [9] Hoffmann, K. and Chiang S. *Computational Fluid Dynamics for Engineers*, Vol I. Library of Congress Catalog Card Number 93-090310, 1993.

- [10] Marshall, G. *Solución Numérica de Ecuaciones Diferenciales Vol. II, Métodos Computacionales en Ciencia e Ingeniería*. Edit. Reverté, Buenos Aires, 2005.
- [11] Lara, L. *Método de Diferencias Finitas para la Solución de las Ecuaciones de Navier-Stokes*. Tesis Maestría, UNT , 2000.
- [12] Patankar, S. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Edit. McGraw-Hill Book Company, USA, 1990.
- [13] Polanco, F. and May L. *An Implicit Finite Difference Approximation to the one-dimensional Transport Equation*, ANZIAM J **42**(E) pp.1179-1198, 2000.
- [14] Smith, G. *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, 1990.
- [15] Strange, G. *Introductiona to Applied Mathematics* , Wellesley-Cambridge Press, Massachusetts, 2005.
- [16] Striwerda, J. *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*. University of Wisconsin-Madison. U.S.A, 1990.
- [17] K. Hoffmann *Computational fluid dynamics*. Vol. I, Edit. EEEbooks, USA, 2000.
- [18] Thomas, J. *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Edit. Springer-Verlag, Nwe York, Inc, 2005.
- [19] Valbuena, D. and Racedo, N. *Método de diferencias finitas en electromagnetismo*. Edit. Educosta, Colombia, 2010.

Trabajar con ecuaciones de tipo hiperbólico, ecuaciones de tipo parabólico o una combinación de ambos para tratar problemas que involucran modelos de tamaño arbitrario, son de creciente interés de matemáticos y especialistas en computación científica. Según el tipo de problema, es necesario realizar un estudio del método numérico más conveniente antes de su aplicación a un problema concreto. El presente volumen brinda al lector una introducción a los métodos numéricos, así como explicaciones sobre el método de diferencias para ecuaciones hiperbólicas, el método de diferencias para ecuaciones parabólicas y sobre la ecuación de transporte.



UPAO

FONDO EDITORIAL